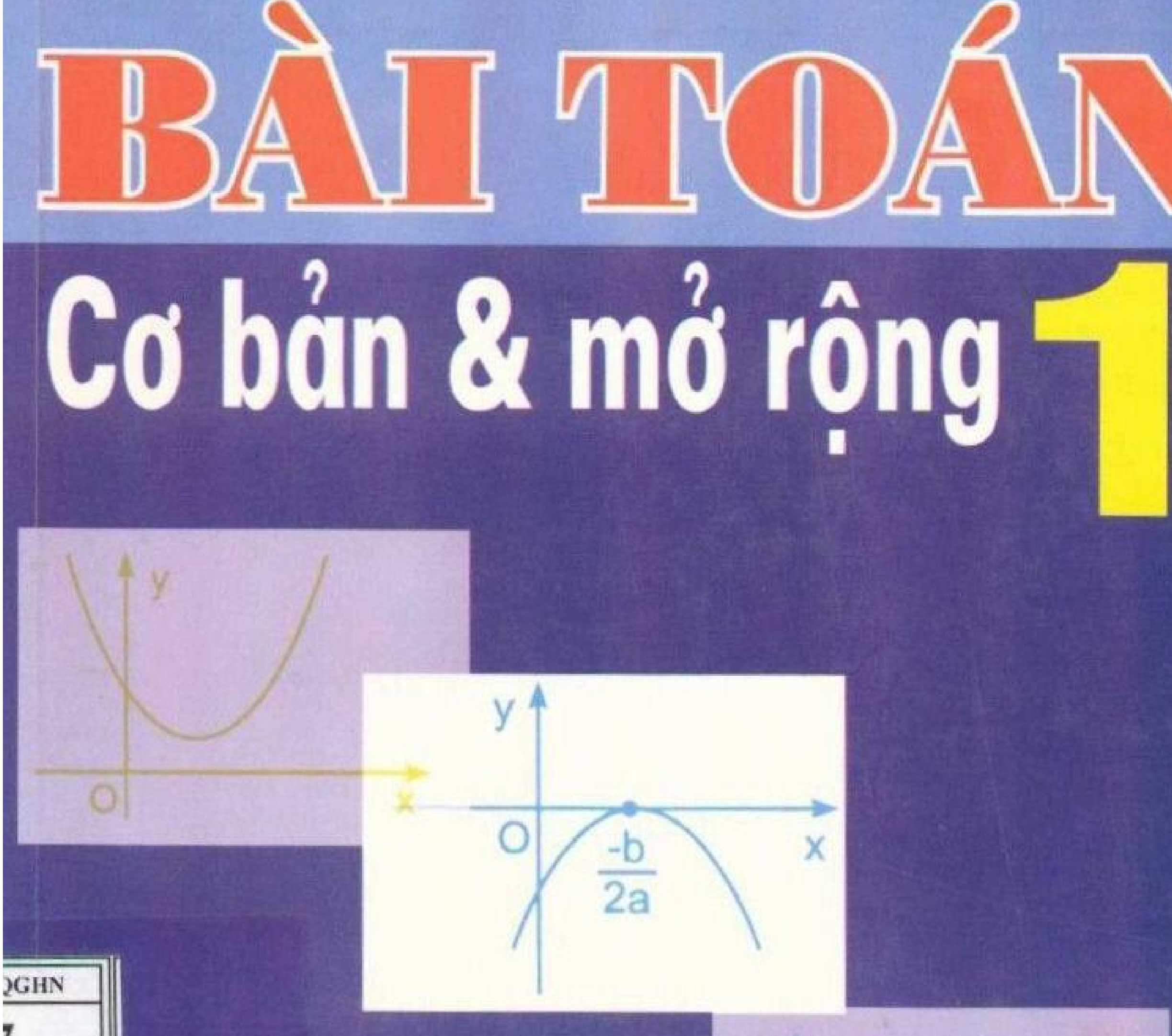
DƯƠNG ĐỨC KIM - ĐỖ DUY ĐỒNG

500
BÀI TOÁN
Cơ bản & mở rộng 10


y
O
x
y
O
x
-b
2a
y
O
x_1
x_2
x

QGHN
7
K
5
23

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

DƯƠNG ĐỨC KIM - ĐỖ DUY ĐỒNG

500 BÀI TOÁN
CƠ BẢN VÀ MỞ RỘNG
10

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương 1

MỆNH ĐỀ & TẬP HỢP

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. MỆNH ĐỀ

1. *Mệnh đề là câu khẳng định hoặc là đúng hoặc là sai và không được vừa đúng vừa sai.*

+ ***Phủ định*** *của mệnh đề A được kí hiệu là* $\overline{A}$. *Nếu A đúng thì* $\overline{A}$ *sai. Nếu A sai thì* $\overline{A}$ *đúng.*

+ *Cho A và B là hai mệnh đề. Mệnh đề : "Nếu A thì B", kí hiệu : A ⇒ B, được gọi là* ***mệnh đề kéo theo.***

A ⇒ B chỉ sai khi A đúng, B sai.

Một định lí toán học thường có dạng : A ⇒ B. Ta gọi A là ***giả thiết****, B là* ***kết luận*** *hay A là* ***điều kiện đủ*** *để có B hay B là* ***điều kiện cần*** *để có A.*

+ *Mệnh đề A* ***tương đương*** *với mệnh đề B, kí hiệu A ⇔ B nếu A ⇒ B và B ⇒ A đều là các mệnh đề đúng.*

Định lí dạng : A ⇔ B thường được phát biểu dưới dạng :

"A là ***điều kiện cần và đủ*** *để có B"*

"B là điều kiện cần và đủ để có A"

"A ***khi và chỉ khi*** *B"*

"A ***nếu và chỉ nếu*** *B"*

+ *Mệnh đề : "Với mọi x ∈ X, P(x) là mệnh đề đúng" được kí hiệu là :*

$$\forall x \in X : P(x)$$

Mệnh đề : "Có ít nhất một x ∈ X, P(x) là mệnh đề đúng" được kí hiệu là :

$$\exists x \in X : P(x).$$

+ *Phủ định của mệnh đề có chứa kí hiệu ∀, ∃ như sau :*

$$\overline{\forall x \in X : P(x)} = \exists x \in X : \overline{P(x)}$$

$$\overline{\exists x \in X : P(x)} = \forall x \in X : \overline{P(x)}$$

BÀI TẬP

1 Trong các câu sau đây, câu nào là một mệnh đề (toán học) :

a) Số π là một số hữu tỉ.

b) Mở cửa ra !

c) Bạn có đi du lịch dịp nghỉ lễ Tết dương lịch không ?

d) Thổ Nhĩ Kì là một nước thuộc châu Á.

Giải

a) Là một khẳng định sai. Đó là một mệnh đề (toán học hay lôgic). Câu này là mệnh đề sai.

b) Không phải là mệnh đề. Vì không có tính đúng hay sai.

c) Không phải là một mệnh đề.

d) Là mệnh đề.

2 Hãy phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau :

a) Số π là một số hữu tỉ.

b) Tam giác ABC là tam giác vuông.

c) Niu Di Lân là một nước thuộc châu Âu.

d) Tất cả học sinh lớp 10B đều cao từ 1,55m trở lên.

Giải

a) Số π không phải là số hữu tỉ.

b) Tam giác ABC không phải là tam giác vuông.

c) Niu Di Lân không phải là một nước thuộc châu Âu.

d) Không phải mọi học sinh lớp 10B đều cao từ 1,55m trở lên. Hoặc ta cũng có thể nói : "Có ít nhất một học sinh lớp 10B cao dưới 1,55m".

3 Cho 2 mệnh đề : A : "Tứ giác ABCD là hình thoi".

B : "Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc".

a) Phát biểu mệnh đề kéo theo : $A \Rightarrow B$

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $A \Rightarrow B$ và xét tính đúng, sai của nó.

Giải

a) $A \Rightarrow B$: "Nếu tứ giác ABCD là hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc".

b) Mệnh đề đảo của A ⇒ B là B ⇒ A.

B ⇒ A : "Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc thì nó là hình thoi ABCD". Mệnh đề đảo B ⇒ A sai (mặc dù A ⇒ B đúng).

4 Phát biểu mệnh đề đảo của mỗi mệnh đề dưới đây và xét tính đúng, sai của mệnh đề đảo.

a) Số tự nhiên có chữ số tận cùng bằng 0 thì chia hết cho 5.

b) Hai dây cung của một đường tròn bằng nhau thì chúng cách đều tâm.

Giải

a) Số tự nhiên chia hết cho 5 thì có chữ số tận cùng là 0.

Mệnh đề này sai. Chẳng hạn 15 chia hết cho 5 nhưng không có chữ số tận cùng là 0.

b) Trong một đường tròn hai dây cung cách đều tâm thì chúng bằng nhau. Mệnh đề này đúng.

5 Cho hai mệnh đề : A : "$\sqrt{2}$ là một số vô tỉ".

B : "$\sqrt{3}$ là một số hữu tỉ".

Phát biểu mệnh đề A ⇒ B và xét tính đúng sai của nó.

Giải

Mệnh đề A ⇒ B : "Nếu $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ thì $\sqrt{3}$ là một số hữu tỉ
Mệnh đề này sai. Vì A đúng, B sai.

6 Cho hai mệnh đề : A : "$\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ".

B : "$\sqrt{3}$ là một số vô tỉ".

Phát biểu mệnh đề A ⇒ B và xét tính đúng sai của nó.

Giải

A ⇒ B : "Nếu $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ thì $\sqrt{3}$ là một số vô tỉ". Mệnh đề này đúng vì A sai, B đúng.

Ghi chú : Nếu A sai, B sai thì A ⇒ B vẫn là mệnh đề đúng.

7 Cho hai mệnh đề : A : "Số tự nhiên x chia hết cho 9".

B : "Số tự nhiên x có tổng các chữ số chia hết cho 9".

a) Phát biểu mệnh đề A ⇒ B, mệnh đề B ⇒ A và xét tính đúng sai của chúng.

b) Dùng thuật ngữ : "điều kiện cần" để phát biểu mệnh đề A ⇒ B.

c) Phát biểu mệnh đề A ⇔ B theo bốn cách.

Giải

a) + A ⇒ B : "Nếu số tự nhiên x, chia hết cho 9 thì tổng các chữ số của nó chia hết cho 9". Mệnh đề này đúng.

+ B ⇒ A : "Nếu tổng các chữ số của số tự nhiên x chia hết cho 9 thì x chia hết cho 9". Mệnh đề này cũng đúng.

b) A ⇒ B có thể phát biểu là : "Điều kiện cần để số tự nhiên x chia hết cho 9 là tổng các chữ số của nó chia hết cho 9".

c) Bốn cách phát biểu A ⇔ B là :

+ "Điều kiện cần và đủ để số tự nhiên x chia hết cho 9 là tổng các chữ số của nó chia hết cho 9".

+ "Điều kiện cần và đủ để tổng các chữ số của số tự nhiên x chia hết cho 9 là x chia hết cho 9".

+ "Số tự nhiên x chia hết cho 9 khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 9".

+ "Số tự nhiên x chia hết cho 9 nếu và chỉ nếu tổng các chữ số của x chia hết cho 9".

8 Dùng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu mỗi định lí sau :

a) Nếu hai đường thẳng (trong một mặt phẳng) cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

b) Nếu tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn thì tổng hai góc đối của nó bằng 180°.

Giải

a) Điều kiện đủ để hai đường thẳng song song với nhau là chúng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

b) Tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn là điều kiện đủ để tổng hai góc đối của nó bằng 180°.

9 Dùng kí hiệu để diễn đạt mệnh đề :

a) Bình phương của một số hữu tỉ là một số khác 2.

b) Có một số hữu tỉ khi bình phương thì bằng 3.

Giải

a) $\forall x \in Q : x^2 \neq 2$ **b)** $\exists x \in Q : x^2 = 3$.

10 Cho các mệnh đề chứa biến : $P(n)$ = "n^2 chia hết cho 3", $Q(n)$ = "n chia hết cho 3".

a) Phát biểu và chứng minh định lí $\forall n \in N : P(n) \Rightarrow Q(n)$.

b) Phát biểu và chứng minh định lí đảo của định lí trên.

c) Phát biểu định lí thuận và đảo trên đây bằng thuật ngữ điều kiện cần và đủ.

Giải

a) Nếu bình phương số tự nhiên n chia hết cho 3 thì n chia hết cho 3.

Chứng minh : $n = 3k + r$; $k, r \in N$, $0 \le r \le 2$

$n^2 = (3k + r)^2 = [9k^2 + 6kr] + r^2$, $n^2 \vdots 3 \Rightarrow r^2 \vdots 3$

$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow n \vdots 3$ (chia hết kí hiệu là $\vdots$)

b) Nếu số tự nhiên n chia hết cho 3 thì n^2 chia hết cho 3.

Chứng minh : $n = 3k$, $k \in N \Rightarrow n^2 = 9k^2 \Rightarrow n^2 \vdots 3$

c) Điều kiện cần và đủ để số tự nhiên n chia hết cho 3 là n^2 chia hết cho 3.

11 **a)** Dùng kí hiệu để diễn đạt mệnh đề : "Với mọi số tự nhiên n, số $A(n) = n^2 - 1$ không chia hết cho 4".

b) Dùng kí hiệu để diễn đạt mệnh đề phủ định của mệnh đề trên và diễn đạt mệnh đề phủ định này bằng ngôn ngữ thông thường.

Giải

a) $\forall n \in N : n^2 - 1 \not\vdots\, 4$ ($\not\vdots$ kí hiệu không chia hết)

b) $\overline{\forall n \in N : n^2 - 1 \not\vdots\, 4} = \exists n \in N : n^2 - 1 \vdots 4$

Phát biểu : "Tồn tại số tự nhiên n để cho $n^2 - 1$ chia hết cho 4".

12 **a)** Dùng kí hiệu biểu thị mệnh đề : "Có số hữu tỉ r thỏa mãn hệ thức $r^2 = 5$".

b) Lập mệnh đề phủ định mệnh đề trên.

Giải

a) $\exists r \in Q : r^2 = 5$ **b)** $\overline{\exists r \in Q : r^2 = 5} = \forall r \in Q : r^2 \neq 5$.

13 Chứng minh bằng phương pháp phản chứng mệnh đề : "Tổng của hai số là một số lớn hơn 2 thì trong hai số ấy có ít nhất một số lớn hơn 1".

Giải

Cho $a + b > 2$. Giả sử $a \le 1$ và $b \le 1$ thì $a + b \le 1 + 1 = 2$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $a + b > 2$

Vậy phải có : $a > 1$ hoặc $b > 1$.

14 Chứng minh bằng phản chứng định lí : "Nếu hai số nguyên a, b có tổng bình phương chia hết cho 3 thì cả a và b đều chia hết cho 3".

Giải

Cho $a^2 + b^2 \vdots 3$:

– Giả sử $a \not\vdots 3$, $b \vdots 3$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = 3k + l \text{ với } k, l \in Z : l = \pm 1, \pm 2 \\ b = 3m \text{ với } m \in Z \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = (3k + l)^2 + (3m)^2 = 9k^2 + 6kl + l^2 + 9m^2$$
$$= 3(3k^2 + 2kl + 3m^2) + l^2$$

Do $l = \pm 1, \pm 2 \Rightarrow l^2 = 1, 4 \Leftrightarrow l^2 \not\vdots 3 \Rightarrow a^2 + b^2 \not\vdots 3$ (trái giả thiết) nên không xảy ra trường hợp có một số chia hết cho 3.

– Giả sử $a \not\vdots 3$ và $b \not\vdots 3$, tức là : $a = 3k + l$ với $k, l \in Z : l = \pm 1, \pm 2$

$b = 3m + n$ với $m, n \in Z : n = \pm 1, \pm 2$

Khi đó: $a^2 + b^2 = (3k + l)^2 + (3m + n)^2$
$$= 9k^2 + 6kl + l^2 + 9m^2 + 6mn + n^2$$
$$= 3(3k^2 + 2kl + 3m^2 + 2mn) + (l^2 + n^2)$$

Dễ thấy $l^2 + n^2$ chỉ có thể nhận các giá trị :

$l^2 + n^2 = 1 \not\vdots 3$ hoặc $l^2 + n^2 = 5 \not\vdots 3$

Suy ra $a^2 + b^2 \not\vdots 3$ (trái với giả thiết)

Vậy cũng không thể xảy ra trường hợp cả hai số đều không chia hết cho 3.

Tổng hợp cả hai trường hợp : Nếu $a^2 + b^2 \vdots 3$ thì $a \vdots 3$ và $b \vdots 3$.

15 Chứng minh bằng phản chứng định lí : "Nếu ba số dương a, b, c đều nhỏ hơn 2 thì có ít nhất một trong 3 bất đẳng thức sau đây là sai".

(1) $a(2 - b) > 1$; (2) $b(2 - c) > 1$; (3) $c(2 - a) > 1$.

Giải

Giả sử (1), (2) và (3) đều đúng thì ta có :

$$a(2 - b).b(2 - c).c(2 - a) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad [a(2 - a)][b(2 - b)][c(2 - c)] > 1$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Côsi : $\sqrt{a(2 - a)} \le \dfrac{a + (2 - a)}{2} = 1$

$$\Rightarrow \quad a(2 - a) \le 1$$

Tương tự, ta có : $b(2 - b) \le 1$ và $c(2 - c) \le 1$

Suy ra VT bất đẳng thức cuối không lớn hơn 1 : mâu thuẫn.

Vậy có ít nhất một bất đẳng thức sai.

II. TẬP HỢP VÀ PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1. *Kí hiệu $a \in A$ để chỉ a là một* ***phần tử của tập hợp A*** *hay* ***a thuộc tập hợp A****, $a \notin A$ khi a không thuộc A.*

2. *Tập hợp rỗng, kí hiệu $\varnothing$ là tập hợp không có phần tử nào.*

3. *Ta bảo A là* ***tập hợp con*** *của B, kí hiệu $A \subset B$, nếu*

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B$$

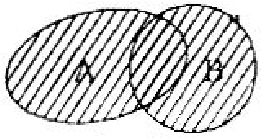
4. *Hai tập hợp A và B* ***bằng nhau****, kí hiệu $A = B$*

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \quad \text{và} \quad B \subset A$$

5. *Ta gọi là* ***hợp*** *của A và B,*

kí hiệu $A \cup B$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

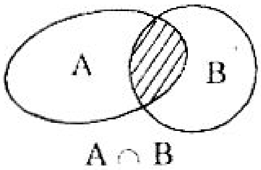


$A \cup B$

6. *Ta gọi là* ***giao*** *của A và B,*

kí hiệu $A \cap B$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$

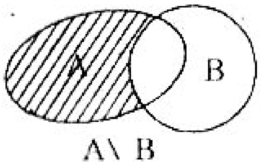


$A \cap B$

7. *Ta gọi là* ***hiệu*** *của A và B,*

kí hiệu $A \setminus B$

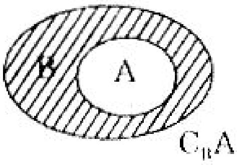
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$



$A \setminus B$

8. *Nếu $A \subset B$ thì $B \setminus A$ gọi là* ***phần bù*** *của A trong B,*

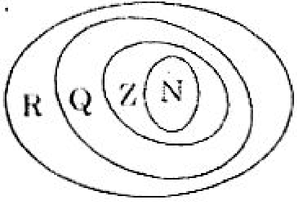
kí hiệu $C_B A$



$C_B A$

9. *Quan hệ giữa các tập hợp số quan trọng :*

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$



10. *Kí hiệu khoảng, đoạn, nửa khoảng :*

$(a; b)$, $[a; b]$, $(a; b]$, $[a; b)$.

BÀI TẬP

16 Cho tập hợp A = {1; a; x}. Hãy liệt kê ra tất cả các tập hợp con của tập hợp A.

Giải

$\varnothing$, {1}, {a}, {x}, {1; a}, {1; x}, {a; x}, {1; a; x}.

Ghi chú : Tập $\varnothing$ là một tập hợp con của bất kì tập hợp nào. Mỗi tập hợp là tập hợp con của chính nó.

17 Cho các tập hợp : $A = \{0; 1; 2; 3\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$.

Hãy xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Giải

$A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 6; 8\}$, $A \cap B = \{2\}$

$A \setminus B = \{0; 1; 3\}$, $B \setminus A = \{4; 6; 8\}$.

18 Cho các tập hợp : $A = \{a; b; c; d\}$, $B = \{b; d; e\}$, $C = \{a; b; e\}$.

Chứng minh các hệ thức : **a)** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ (1)

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ (2)

Giải

a) Ta có : $B \setminus C = \{d\}$, $A \cap B = \{b; d\}$, $A \cap C = \{a; b\}$

VT (1) = $A \cap (B \setminus C) = \{d\}$

VP (1) = $A \cap B \setminus (A \cap C) = \{b; d\} \setminus \{a; b\} = \{d\}$

$\Rightarrow$ (1)

b) VT (2) = $\{a; b; c; d\} \setminus \{b; e\} = \{a; c; d\}$

VP (2) = $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{a; c\} \cup \{c; d\} = \{a; c; d\}$

$\Rightarrow$ (2)

Ghi chú : Có thể chứng minh (1) và (2) đúng với các tập hợp A, B, C bất kì. Khi đó ta cần sử dụng các định nghĩa và chỉ rõ tập hợp ở VT là tập hợp con của tập hợp vế phải và đảo lại.

19 Cho $A = \{0; 1; 2\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

a) Xác định tập hợp $B \setminus A$.

b) Chỉ ra tập hợp C sao cho : $A \cup C = B$.

Giải

a) $B \setminus A = \{3; 4\}$

b) $A \cup C = B \Rightarrow B \setminus A \subset C$ và $C \subset B$

Vậy có thể chọn C là một trong các tập hợp con của B có chứa $B \setminus A$

Chẳng hạn : $\{3; 2\}$, $\{3; 4; 0\}$, $\{3; 4; 1\}$, $\{3; 4; 2\}$, $\{3; 4; 0; 1\}$ hay B.

20 Tìm các tập hợp A và B, biết : $A \setminus B = \{1; 5; 7; 8\}$

$A \cap B = \{3; 6; 9\}$

$A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 10\}$.

Giải

$A = A \setminus B \cup A \cap B = \{1; 5; 7; 8\} \cup \{3; 6; 9\} = \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}$

$B = (A \cup B \setminus A) \cup (A \cap B) = \{2; 4 ; 10\} \cup \{3; 6; 9\} = \{2; 3; 4; 6; 9; 10\}$

21 Cho $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. $B = \{1; 2; 3; 4\}$, $C = \{2; 4; 6; 8\}$.

Xác định các tập : C_AB, C_AC, $C_A(B \cup C)$.

Giải

$C_AB = \{5; 6; 7; 8; 9\}$. $C_AC = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

$B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\} \Rightarrow C_A(B \cup C) = \{5; 7; 9\}$.

22 Chứng minh :

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (1)

b) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$ (2)

Giải

a) $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ và $x \in B \cup C$

$\Rightarrow x \in A$ và $x \in B$ hoặc $x \in A$ và $x \in C$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ hoặc $x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (3)

Đảo lại :

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap B$ hoặc $x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in A$ và B hoặc $x \in A$ và C

$\Rightarrow x \in A$ và $x \in B \cup C$

$\Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra (1).

b) Theo kết quả câu a) ta có : $VT = (A \cup B) \cap C \cup (A \cup B) \cap D$

Lại áp dụng kết quả câu a) ta có :

$VT = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$ đpcm.

23 Có thể kết luận $A = B$ hay không nếu xảy ra mỗi trường hợp dưới đây :

a) $A \cup C = B \cup C$ **b)** $A \cap C = B \cap C$.

Giải

a) Không thể nói chắc $A = B$. Chẳng hạn $A = \{0; 1\}$, $B = \{0; 3\}$, $C = \{1; 2; 3\}$.

Ở đây $A \neq B$ nhưng $A \cup C = \{0; 1; 2; 3\} = B \cup C$.

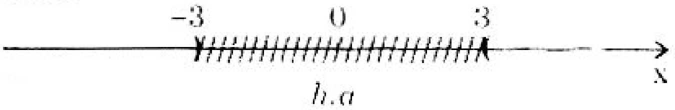
b) Tương tự như câu a). Ví dụ $A = \{0; 1; 2\}$, $B = \{1; 2; 3\}$, $C = \{2; 4; 6; 8\}$. Ta thấy $A \cap C = \{2\} = B \cap C$ nhưng $A \neq B$.

24 Hãy biểu diễn mỗi tập hợp dưới đây thành hợp của hai khoảng và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $A = \{x \in R \ / \ |x| > 3\}$ **b)** $B = (-5; 6) \setminus [1; 3]$.

Giải

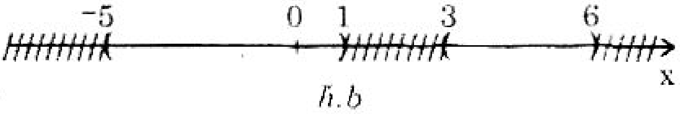
a) $A = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$



h.a

Tập hợp A được biểu diễn trên trục số là phần không bị gạch sọc trong h.a.

b) $B = (-5; 1) \cup (3; 6)$



h.b

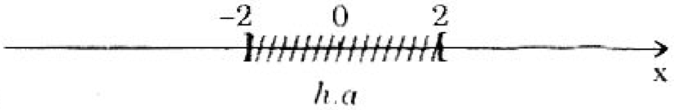
Biểu diễn B trên trục số ở h.b.

25 Biểu diễn mỗi tập dưới đây thành hợp của các nửa khoảng và biểu diễn chúng trên trục số :

a) $A = \{x \in R \ / \ |x| \geq 2\}$ **b)** $B = (-4; 4) \setminus (-1; 1)$.

Giải

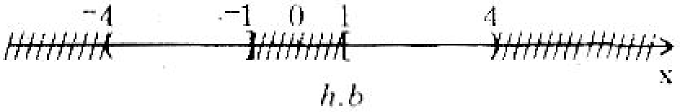
a) $A = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$



h.a

Biểu diễn A trên trục số ở h.a

b) $B = (-4; -2] \cup [1; 4)$



h.b

26 Cho các tập hợp $A = \{x \in R \ / \ |x - 1| < 2\}$, $B = \{x \in R \ / \ |x + 1| < 3\}$.

Xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$ và biểu diễn chúng trên trục số

Giải

a) $|x - 1| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x - 1 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 3$

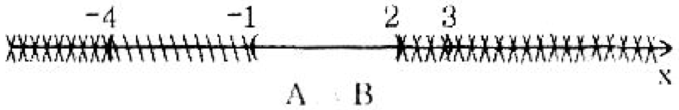
$|x + 1| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x + 1 < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < x < 2$

$\Rightarrow A \cup B = (-1; 3) \cup (-4; 2) = (-4; 3)$

Biểu diễn trên trục số ở hình bên

$A \cup B$

$A \cap B = (-1; 3) \cap (-4; 2) = (-1; 2)$



$A \cap B$

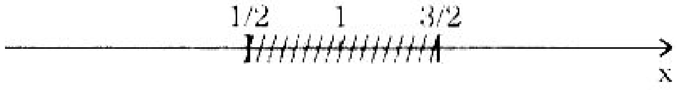
27 Cho các tập hợp : $A = \{x \in R \,/\, \frac{1}{|x - 1|} > 2\}$.

Xác định tập hợp R \ A và biểu diễn trên trục số.

Giải

$$\frac{1}{|x-1|} > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ |x-1| < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$A = \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right)$$



$$R \setminus A = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \cup \{1\}.$$

III. SỐ GẦN ĐÚNG, SAI SỐ

*Cho a là **số gần đúng** của số $\overline{a}$.*

1. ***Sai số tuyệt đối*** *của a; kí hiệu Δ_a*

$$\Delta_a = |a - \overline{a}|$$

2. ***Sai số tương đối*** *của a, kí hiệu δ_a*

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$$

3. *Nếu $|a - \overline{a}| \leq d$ thì d là cận trên của sai số tuyệt đối hay là **độ chính xác** của số gần đúng a và viết :*

$$\overline{a} = a \pm d$$

4. *Cho a, b là các số gần đúng với sai số tuyệt đối Δ_a, Δ_b, sai số tương đối δ_a, δ_b thì :*

$$\Delta_{(a+b)} \leq \Delta_a + \Delta_b \; ; \qquad \Delta_{(a-b)} \leq \Delta_a + \Delta_b$$

$$\delta_{(a.b)} \leq \delta_a + \delta_b \; ; \qquad \delta_{\left(\frac{a}{b}\right)} \leq \delta_a + \delta_b.$$

5. *Trong cách viết số gần đúng a, một chữ số của a là **đáng tin (chắc)** nếu Δ_a không vượt quá một đơn vị của hàng có chữ số đó.*

6. ***Cách viết chuẩn*** *của số gần đúng là cách viết trong đó mọi chữ số đều đáng tin (chắc).*

BÀI TẬP

28 Dùng phân số $\frac{22}{7}$ làm số gần đúng của số π. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của số gần đúng ấy.

Giải

Sử dụng máy tính bỏ túi ta thấy :

$$\pi = 3,141592654...$$

$$\frac{22}{7} = 3,142857143...$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{22}{7} - \pi < 3,14286 - 3,14159 = 0,00127 = 1,27.10^{-3}$$

Vậy dùng $\frac{22}{7}$ để làm số xấp xỉ số π thì sai số tuyệt đối nhỏ hơn $1,27.10^{-3}$.

29 Dùng các phân số $\frac{38}{17}$ và $\frac{293}{131}$ làm các số gần đúng của $\sqrt{5}$. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của mỗi số ấy.

Giải

Sử dụng máy tính bỏ túi ta có :

$$\sqrt{5} = 2,236067978...$$

$$\frac{38}{17} = 2,235294118...$$

$$\frac{293}{131} = 2,236641221...$$

Suy ra : $0 < \sqrt{5} - \frac{38}{17} < 2,2361 - 2,2352 = 0,0009$

$$0 < \frac{293}{131} - \sqrt{5} < 2,2366 - 2,2360 = 0,0006$$

Vậy nếu dùng $\frac{38}{17}$ làm số gần đúng của $\sqrt{5}$ thì sai số tuyệt đối không vượt quá $0,0009 = 9.10^{-4}$. Và dùng $\frac{293}{131}$ làm số xấp xỉ của $\sqrt{5}$ thì sai số tuyệt đối không vượt quá $0,0006 = 6.10^{-4}$.

30 Hãy viết số gần đúng của số π với :

a) 3 chữ số chắc (đáng tin) **b)** 5 chữ số chắc (đáng tin).

Giải

a) Ta có : $\pi = 3{,}141592654...$

Lấy số 3,14 là số gần đúng của π thì có : $0 < \pi - 3{,}14 < 0{,}0016$

tức là sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0016.

Một đơn vị ở hàng phần trăm lớn hơn sai số tuyệt đối nên chữ số 4 ở hàng phần trăm là chữ số chắc (đáng tin), các chữ số 3, 1 đứng ở bên trái chữ số 4 là các chữ số chắc (đáng tin).

Vậy 3,14 là số gần đúng của số π với 3 chữ số đáng tin.

b) Tương tự như trên ta có :

$$0 < 3.1416 - \pi < 3.1416 - 3.14159 = 0{,}00001$$

Lấy 3,1416 làm số gần đúng của π thì sai số tuyệt đối nhỏ hơn 10^{-5}

Số gần đúng của số π với 5 chữ số đáng tin là 3,1416.

31 Cho đường kính của đường tròn là 10 ± 0,01cm.

Hãy tính chu vi, diện tích của hình tròn và ước lượng sai số tuyệt đối của kết quả.

Giải

a) Chi vi hình tròn là $C = \pi.d$ (d là đường kính)

Sai số tuyệt đối của kết quả : $\Delta_C \le \Delta_\pi + \Delta_d$

Lấy $\pi = 3{,}14$ thì $\Delta_\pi < 0{,}002$. Khi đó chu vi hình tròn là :

$$C = 3.14 \times 10 = 31.4\text{cm}$$

với sai số tuyệt đối $\Delta_C < 0{,}002 + 0{,}01 = 0{,}012$.

b) Diện tích hình tròn :

$$S = \pi\frac{d^2}{4} = 3{,}14.\frac{100}{4} \approx 78{,}5\text{cm}^2$$

Sai số tuyệt đối :

$$\Delta_C \le \Delta_\pi + 2\Delta_d < 0.002 + 0{,}02 = 0.022$$

Ta có thể viết kết quả tính chu vi và diện tích hình tròn như sau

$$C = 31{,}4 \pm 0{,}012\text{cm},\ S = 78{,}5 \pm 0{,}022\text{cm}^2.$$

32 Hai kĩ thuật viên trắc địa tham gia đo diện tích một thửa đất hình tam giác. Người thứ nhất đo đáy tam giác với kết quả 65,58m với sai số tương đối 1‰. Người thứ hai đo đường cao tương ứng của tam giác với kết quả 47,39m với sai số tương đối là 3‰. Hãy tính diện tích của tam giác và viết kết quả dưới dạng chuẩn.

Giải

Gọi a là cạnh đáy, h_a là đường cao ứng với cạnh a

Diện tích tam giác là : $S = \frac{1}{2}a.h_a$

Sai số tuyệt đối trong kết quả đo cạnh a của tam giác :

$$\Delta_a = a.\delta_a = 65,58.\frac{1}{1000} < 0,07m.$$

Sai số tuyệt đối trong kết quả đo đường cao tương ứng :

$$\Delta_h = h_a.\delta_h = 47,39\frac{3}{1000} \leq 0,14m$$

Sai số tuyệt đối trong tính diện tích :

$$\Delta_S \leq \Delta_a + \Delta_h \leq 0,21m^2$$

Diện tích $S = \frac{1}{2}65,6.47,4 = 1554,72 \pm 0,21m^2$

Viết chuẩn diện tích tam giác $S = 1555m^2$.

Chương 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT, HÀM SỐ BẬC HAI

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. KHÁI NIỆM HÀM SỐ

+ *Cho* $\varnothing \neq D \subset R$. *Một hàm số f xác định trên D, kí hiệu*

$$\begin{aligned} f &: D \to R \\ &x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

D là ***miền xác định*** *hay* ***tập xác định*** *của f(x). Với* $a \in D$ *thì f(a) được gọi là giá trị của f(x) tại* $x = a$.

+ *Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp điểm* $(x; f(x))$, $x \in D$ *là* ***đồ thị*** *của hàm số :*

$$\begin{aligned} f &: D \to R \\ &x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

+ *Hàm số* $y = f(x)$ *là* ***đồng biến*** *trên khoảng (a; b) nếu* $\forall x_1 \neq x_2 \in (a; b)$:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

là ***nghịch biến*** *trên khoảng (a; b) nếu* $\forall x_1 \neq x_2 \in (a; b)$:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

+ *Hàm số*

$$\begin{aligned} f &: D \to R \\ &x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

là ***hàm số chẵn*** *nếu* $x \in D \Rightarrow -x \in D$ *và* $f(-x) = f(x)$

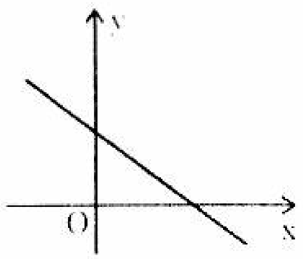
là ***hàm số lẻ*** *nếu* $x \in D \Rightarrow -x \in D$ *và* $f(-x) = -f(x)$.

II. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ VÀI HÀM SỐ LIÊN QUAN

+ ***Hàm số bậc nhất*** *có công thức* $y = ax + b \ (a \neq 0)$

có tập xác định $D = R$ *đồng biến nếu* $a > 0$

nghịch biến nếu $a < 0$.

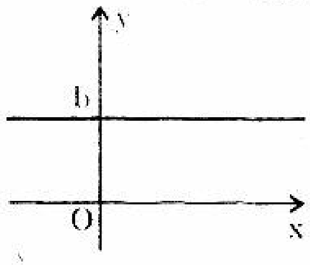


Đồ thị hàm số $y = ax + b$ *là* ***một đường thẳng***

ta gọi là đường thẳng $y = ax + b$

+ ***Hàm số hằng*** *$y = b$*

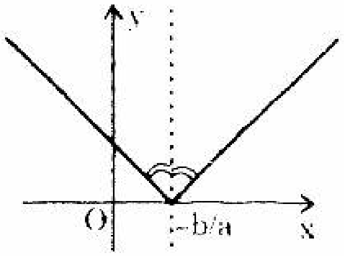
Đồ thị là đường thẳng song song với trục hoành cắt trục tung tại điểm $P(0; b)$



+ *Hàm số $y = |ax + b|$, $a \neq 0$ có tập xác định $D = R$, nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$ đồng biến trên $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$*

Đồ thị là hai tia gốc là điểm $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ đối xứng với nhau qua đường $x = -\frac{b}{a}$.

trùng với đồ thị hàm số $y = -ax - b$ (với $a > 0$) trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$, trùng với đồ thị hàm số $y = ax + b$ trên khoảng $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.



BÀI TẬP

33 Tìm tập xác định của mỗi hàm số :

a) $y = \dfrac{3x - 2}{3x^2 + 7x + 4}$ **b)** $y = \dfrac{2x + 4}{(x + 2)(x - 1)}$.

Giải

a) Tập xác định : $D = \{x \in R \ / \ 3x^2 + 7x + 4 \neq 0\} = R \setminus \left\{-1; -\frac{4}{3}\right\}$.

b) Tập xác định : $D = \{x \in R \ / \ (x + 2)(x - 1) \neq 0\} = R \setminus \{-2; 1\}$.

34 Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = \sqrt{3x + 5} - \sqrt{3 - 2x}$ **b)** $y = \sqrt{3 + 5x} + \dfrac{2 + x}{\sqrt{2x - 3}}$.

Giải

a) $\sqrt{3 + 5x}$ xác định trên $D_1 = \{x \in R \ / \ 3x + 5 \geq 0\} = \left[-\frac{5}{3}; +\infty\right)$

$\sqrt{3 - 2x}$ xác định trên $D_2 = \{x \in R \ / \ 3 - 2x \geq 0\} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$

Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3x + 5} - \sqrt{3 - 2x}$ là :

$$D = D_1 \cap D_2 = \left[-\frac{5}{3}; \frac{3}{2}\right].$$

b) Tương tự câu a), tập xác định của hàm số là :

$$D = \{x \in R \,/\, 3 + 5x \geq 0\} \cap \{x \in R \,/\, 2x - 3 > 0\}$$

$$= \left[-\frac{3}{5}; +\infty\right) \cap \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

35 Cho hàm số $y = f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{10 - x}}$. Tính f(2), f(6).

Giải

$f(2) = 2 + \frac{2}{\sqrt{10 - 2}} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f(6) = 6 + \frac{2}{\sqrt{10 - 6}} = 7$.

36 Trên mặt phẳng tọa độ cho các điểm A(7; 51), B(4; 12), C(5; 25 + $\sqrt{2}$).

Điểm nào trong các điểm đã cho nằm trên đồ thị của hàm số :

$$y = x^2 + \sqrt{x - 3}.$$

Giải

Ta có : $f(7) = 7^2 + \sqrt{7 - 3} = 51$.

Vậy A(7; 51) thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^2 + \sqrt{x - 3}$

Xét điểm B(4; 12) ta thấy : $f(4) = 4^2 + \sqrt{4 - 3} = 17 \neq 12$

Vậy B(4; 12) không thuộc đồ thị hàm số f(x).

Xét tương tự ta thấy C(5; 25 + $\sqrt{2}$) thuộc đồ thị.

37 Cho hàm số $y = \frac{mx + 2}{x + m - 1}$ (m là tham số). Với những giá trị nào của m thì :

a) Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

b) Đồ thị hàm số không cắt trục tung.

Giải

a) Đồ thị hàm số không cắt trục hoành khi phương trình

$$\frac{mx + 2}{x + m - 1} = 0 \qquad (1) \qquad \text{vô nghiệm.}$$

Phương trình (1) vô nghiệm trong các trường hợp sau :

1. Phương trình mx + 2 = 0 vô nghiệm. Điều này xảy ra khi m = 0.
2. Nghiệm của phương trình mx + 2 = 0 cũng là nghiệm của phương trình x + m − 1 = 0.

Ta có : $x + m - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - m$.

Thay vào $mx + 2 = 0$, ta được :

$$m(1 - m) + 2 = 0 \Leftrightarrow \quad m = -1 \text{ hoặc } m = 2$$

Kết luận : Đồ thị hàm số không cắt trục hoành khi $m = 0$, $m = -1$ và $m = 2$.

b) Đồ thị hàm số không cắt trục tung khi $f(0)$ vô nghĩa. Điều này xảy ra khi $m = 1$.

38 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Giải

Vì $x^2 + 2 > 0 \ \forall x \in R$ nên tập xác định của hàm số là : R

Ta có : $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \dfrac{2(x^2 + 2) - (x - 1)^2}{x^2 + 2} = 2 - \dfrac{(x - 1)^2}{x^2 + 2} \le 2, \ \forall x \in R$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $x = 1$.

Ta lại có thể viết :

$$y = \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2} = \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 2) + \frac{1}{2}(x + 2)^2}{x^2 + 2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{(x + 2)^2}{2(x^2 + 2)} \ge \frac{1}{2}, \ \forall x \in R$$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $x = -2$.

39 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{4x + 3}{x^2 + 1}$.

Giải

$$y = \frac{4x + 3}{x^2 + 1} = \frac{-(x^2 + 1) + (x^2 + 4x + 4)}{x^2 + 1} = \frac{4(x^2 + 1) - (4x^2 - 4x + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= -1 + \frac{(x + 2)^2}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(2x - 1)^2}{x^2 + 1}$$

Suy ra, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 đạt được khi $x = -2$.

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4 đạt được khi $x = \dfrac{1}{2}$.

40 Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

a) $y = 3 - \sqrt{(x-3)(5-x)}$ **b)** $y = 2|x-4| - 3$.

Giải

a) Tập xác định của hàm số : $D = \{x \in R \,/\, (x-3)(5-x) \geq 0\}$

$D = [3; 5]$. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi biểu thức $\sqrt{(x-3)(5-x)}$ đạt giá trị lớn nhất trên D cũng có nghĩa khi $(x-3)(5-x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Vì $(x-3) + (5-x) = 2$ không đổi nên $(x-3)(5-x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x - 3 = 5 - x \Leftrightarrow x = 4$. Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2 đạt được khi $x = 4$.

b) Vì $2|x-4| \geq 0 \ \forall x \in R$ nên $y = 2|x-4| - 3 \geq -3 \ \forall x \in R$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -3 khi $x = 4$.

41 Xác định công thức của hàm số $y = f(x)$, biết rằng :

$$f(2a+4) = a^2 - a + 4 \quad \forall a \in R.$$

Giải

Đặt $t = 2a + 4 \Rightarrow a = \frac{t}{2} - 2$. Do đó

$$f(t) = \left(\frac{t}{2} - 2\right)^2 - \left(\frac{t}{2} - 2\right) + 4 = \frac{t^2}{4} - \frac{5}{2}t + 10$$

Vậy hàm số có công thức là $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 10$.

42 Cho hàm số biến số x : $y = mx^2 + 2x - 4m - 1$ (m là tham số)

Tìm trên mặt phẳng tọa độ các điểm cố định mà mọi đồ thị của hàm số đều đi qua với bất kì giá trị nào của m

Giải

Giả sử điểm $A(x_0, y_0)$ của mặt phẳng tọa độ là điểm mà đồ thị của hàm số đi qua với mọi giá trị của m. Điều này có nghĩa là :

$$y_0 = mx_0^2 + 2x_0 - 4m - 1, \forall m \Leftrightarrow m(x_0^2 - 4) + 2x_0 - y_0 - 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 4 = 0 \\ 2x_0 - y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 2, y_0 = 3 \text{ hoặc } x_0 = -2, y_0 = -5$$

Vậy các điểm $A_1(2; 3)$ và $A_2(-2; -5)$ là các điểm mà đồ thị hàm số luôn đi qua dù m lấy bất bất kì giá trị nào.

43 Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + 2x - 3}{x + 1}$. Tìm trên đồ thị của hàm số các điểm mà tọa độ là các số nguyên.

Giải

Ta có : $y = 2x - \dfrac{3}{x + 1}$

Để y có giá trị nguyên khi x lấy giá trị nguyên thuộc tập xác định thì $\dfrac{3}{x+1}$ phải là số nguyên với $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Điều này chỉ xảy ra khi $x + 1$ là ước của 3, tức là khi $x + 1 = \pm 1, \pm 3$.

Suy ra các điểm thuộc đồ thị hàm số có tọa độ nguyên là :

$$(-4; -7),\ (-2; -1),\ (0; -3),\ (2; 3).$$

44 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{1 - x}$. Tìm trên đồ thị của hàm số các điểm cách đều hai trục tọa độ.

Giải

Điểm $M(x; y)$ cách đều hai trục tọa độ khi và chỉ khi $|y| = |x|$

Ta có : $\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{1 - x} \\ |y| = |x| \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{3}{2},\ y = -\dfrac{3}{2}$

Điểm $A\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$ thuộc đồ thị và cách đều hai trục tọa độ.

45 Cho các hàm số $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ và $g(x) = 2x - 1$.

Xác định các điểm thuộc đồng thời hai đồ thị của hai hàm số.

Giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$$2x^2 - 3x + 2 = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f(x_1) = g(x_1) = 1, \qquad f(x_2) = g(x_2) = 2$$

Vậy các giao điểm của hai đồ thị là $A(1; 1)$, $B\left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$.

46 Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số :

a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$.

Giải

a) Tập xác định của f(x) là $D = [-1, 1]$

Với mọi $x \in D$ đều có $-x \in D$: $f(-x) = f(x)$

Vậy hàm số f(x) là hàm số chẵn.

b) Tập xác định của g(x) : $D = [-1; 0) \cup (0; 1]$

$x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$g(-x) = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{-x} = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \quad \forall x \in D$$

Hàm số g(x) là hàm số chẵn.

47 Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số :

a) $f(x) = \dfrac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|}$ **b)** $g(x) = 2x^2 + 3x + 4.$

Giải

a) Tập xác định $D = R$, $x \in D \Rightarrow -x \in D$ $\forall x \in D$

$$f(-x) = \frac{|1-x| - |1+x|}{|1-x| + |1+x|} = -f(x) \quad \forall x \in D$$

Hàm số f(x) là hàm số lẻ.

b) Tập xác định $D = R$, $x \in D \Rightarrow -x \in D$ $\forall x \in D$

$$g(-x) = 2x^2 - 3x + 4 \neq g(x) \quad \text{và} \quad g(-x) \neq -g(x)$$

Vậy hàm số g(x) không chẵn cũng không lẻ.

48 Tập hợp $D \subset R$ gọi là có tính chất đối xứng nếu $x \in D$ thì $-x \in D$. Chứng minh rằng một hàm số bất kì có tập xác định đối xứng, bao giờ cũng biểu diễn được thành tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

Giải

Giả sử hàm số f(x) xác định trên D có tính chất $x \in D \Rightarrow -x \in D$

Đặt $F(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, $G(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

Ta thấy ngay F(x) và G(x) cùng có tập xác định là D.

Hơn nữa $F(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = F(x)$

Vậy F(x) là hàm số chẵn.

$$G(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -G(x)$$

Vậy G(x) là một hàm số lẻ.

Dễ thấy $f(x) = F(x) + G(x)$ (đpcm).

49 Cho hàm số $y = \frac{3x-4}{x+3}$. Xét sự biến thiên của hàm số trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$ và lập bảng biến thiên của f(x) trên tập xác định.

Giải

Lấy x_1, x_2 bất kì thuộc khoảng $(-\infty; -3)$ với $x_1 \neq x_2$

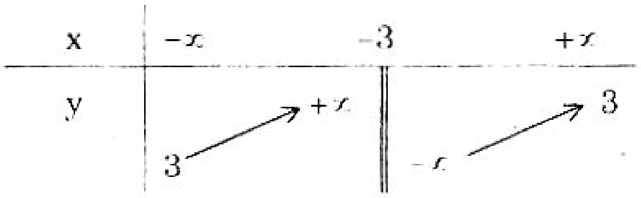
Xét tỉ số :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1}\left[\frac{3x_2 - 4}{x_2 + 3} - \frac{3x_1 - 4}{x_1 + 3}\right] = \frac{13}{(x_2 + 3)(x_1 + 3)} > 0$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$

Làm tương tự ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$

Bảng biến thiên của f(x) như sau :



50 Xét sự biến thiên của hàm số $y = 2x^2 - 5x + 3$ trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Giải

Lấy $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$, $x_1 \neq x_2$ sẽ có : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

51 Cho hàm số : $y = f(x) = \frac{m+1}{m-3}x + 3 - m$ (m là tham số).

Với những giá trị nào của m :

a) f(x) là hàm số bậc nhất. **b)** f(x) nghịch biến trên R.

Giải

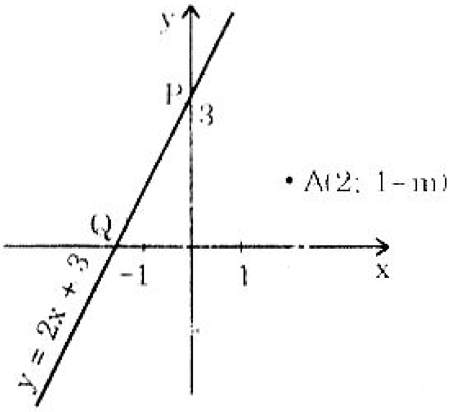
a) Hệ số $\frac{m+1}{m-3}$ xác định và khác 0 nếu $m \neq 3$ và $m \neq -1$

b) Hàm số nghịch biến trên R nếu : $\frac{m+1}{m-3} < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3$.

52 a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$.

b) Tìm giá trị của m để điểm $A(2; 1 - m)$ không thuộc đồ thị của hàm số trên.

Giải



a) Với $x = 0$, $y = 3$

Với $y = 0$, $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

Đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ là đường thẳng đi qua hai điểm $P(0; 3)$ và $Q\left(-\dfrac{3}{2}; 0\right)$.

b) Điểm $A(2; 1 - m)$ không nằm trên đường thẳng $y = 2x + 3$

Với những giá trị của m không phải là nghiệm của phương trình

$1 - m = 2.2 + 3$ tức là với $m \neq -6$.

53 a) Xác định tọa độ giao điểm của các đường thẳng :

$(d_1) : y = 2x + 3$; $(d_2) : y = -x + 5$.

b) Tìm giá trị của m để đường thẳng $y = (1 - m)x + 2$ và các đường thẳng (d_1), (d_2) đồng quy.

Giải

a) Hoành độ của giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của phương trình :

$$2x + 3 = -x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) : $A\left(\dfrac{2}{3}; 4\dfrac{1}{3}\right)$.

b) Ba đường thẳng đồng quy khi $A\left(\dfrac{2}{3}; 4\dfrac{1}{3}\right)$ thuộc đồ thị hàm số

$y = (1 - m)x + 2$:

$$4\frac{1}{3} = (1 - m).\frac{2}{3} + 2 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}.$$

54 Cho các điểm $A(-2; 1)$, $B(1; -3)$, $C(2; m)$, trên mặt phẳng tọa độ.

a) Xác định hàm số có đồ thị là đường thẳng AB.

b) Tìm giá trị của m để điểm C nằm trên đường thẳng AB.

Giải

a) Hàm số nhận đường thẳng AB là đồ thị là hàm số bậc nhất có dạng $y = ax + b$ trong đó a, b là các hằng số cần xác định

$$A \in AB \Rightarrow \quad 1 = -2.a + b \quad (1)$$

$$B \in AB \Rightarrow \quad -3 = a + b \quad (2)$$

Từ (1) suy ra : $b = 1 + 2a$. Thế biểu thức của b vào (2) ta được :

$$-3 = a + 1 + 2a$$

Suy ra : $a = -\frac{4}{3}$, $b = -\frac{5}{3}$.

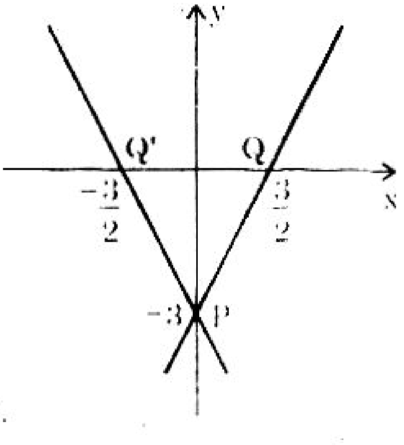
Hàm số $y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$ có đồ thị là dường thẳng AB.

b) C(2; m) thuộc đường thẳng $y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$ nên $m = -\frac{4}{3}.2 - \frac{5}{3} = -\frac{13}{3}$.

55 **a)** Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x - 3$.

b) Xác định hàm số có đồ thị là dường thẳng đối xứng với đường thẳng $y = 2x - 3$ qua trục tung.

Giải



a) Đồ thị là đường thẳng qua hai điểm $P(0; -3)$ và $Q\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ (hình bên).

b) Đường thẳng đối xứng với đường thẳng $y = 2x - 3$ qua trục tung đi qua hai điểm $P(0; -3)$ và $Q'\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.

Đường thẳng PQ' có phương trình : $y = -2x - 3$.

56 **a)** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = |3 - 2x|$.

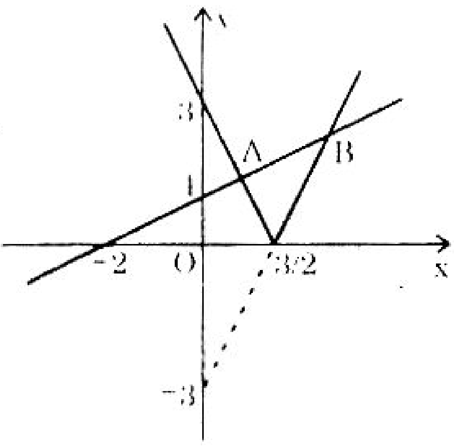
b) Xác định các giao điểm của đồ thị hàm số trong câu a) với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Giải

a) $$y = |3 - 2x| = \begin{cases} -2x + 3 & \text{nếu } x \le \frac{3}{2} \\ 2x - 3 & \text{nếu } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



Đồ thị (hình bên).

b) Hoành độ giao điểm hai đồ thị là nghiệm của phương trình $|3 - 2x| = \frac{1}{2}x + 1$

$$\Leftrightarrow \quad (A)\begin{cases} x \le \frac{3}{2} \\ -2x + 3 = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (B)\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ 2x - 3 = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

Từ hệ (A) ta được : $x = \frac{4}{5}$, suy ra $y = \frac{7}{5}$

Từ hệ (B) ta được : $x = \frac{8}{3}$, suy ra $y = \frac{7}{3}$

Các giao điểm là $A\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$ và $B\left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

57 **a)** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = |2 - x| + |2x + 1|$.

b) Dựa vào đồ thị, biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình :

$$|2 - x| + |2x + 1| = m \qquad (1)$$

Giải

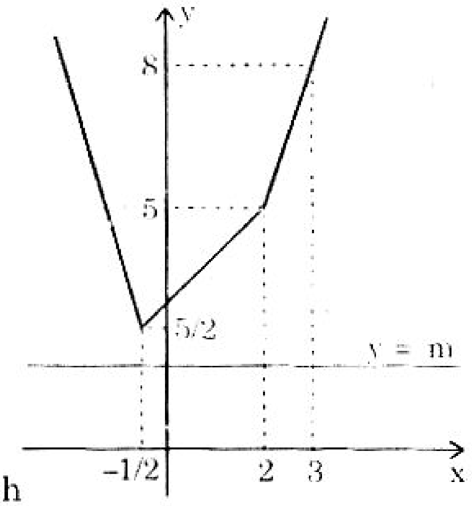
a) Ta lập bảng sau đây :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\lvert 2 - x \rvert$		$2 - x$		$2 - x$	0	$x - 2$	
$\lvert 2x + 1 \rvert$		$-2x - 1$	0	$2x + 1$		$2x + 1$	
y		$-3x + 1$	$\frac{5}{2}$	$x + 3$	5	$3x - 1$	

Như vậy, trên các nửa khoảng khác nhau hàm số có 3 biểu thức khác nhau như sau :

$y = |2 - x| + |2x + 1|$

$$= \begin{cases} -3x + 1 & \text{nếu} \quad x \le -\dfrac{1}{2} \\ x + 3 & \text{nếu} \quad -\dfrac{1}{2} < x \le 2 \\ 3x - 1 & \text{nếu} \quad x > 2 \end{cases}$$



Đồ thị như hình bên.

b) Đường thẳng $y = m$ song song với trục hoành

+ Nếu $m < \dfrac{5}{2}$ thì đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị hàm số.

Phương trình (1) vô nghiệm.

+ Nếu $m = \dfrac{5}{2}$ đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 1 điểm.

Phương trình (1) có 1 nghiệm.

+ Nếu $m > \dfrac{5}{2}$, đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm.

Phương trình (1) có 2 nghiệm.

58 Vẽ đồ thị hàm số : $y = x + |x|$.

Giải

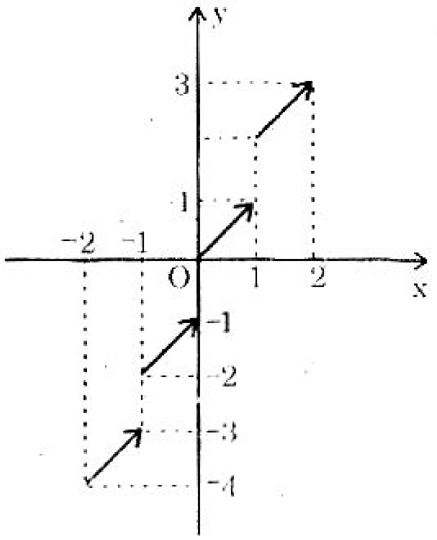
Với mọi $k \in Z$ ta có :

$|x| = k \quad \text{nếu} \quad k \le x < k + 1$

Do đó ta có với mọi $k \in Z$:

$y = x + [x| = x + k \quad \text{nếu} \quad k \le x < k + 1$

Đồ thị là vô số các đoạn thẳng hở một đầu (đầu mũi tên). Xem hình.

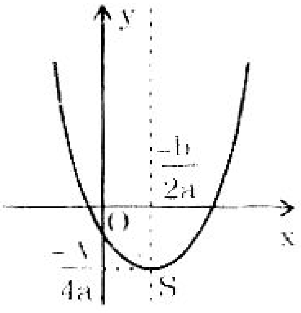


III. HÀM SỐ BẬC HAI $y = ax^2 + bx + c$ $(a \ne 0)$

Tập xác định $D = R$

Với $a > 0$ nghịch biến trên $\left(-\infty ; -\dfrac{b}{2a}\right)$

đồng biến trên $\left(-\dfrac{b}{2a} ; +\infty\right)$

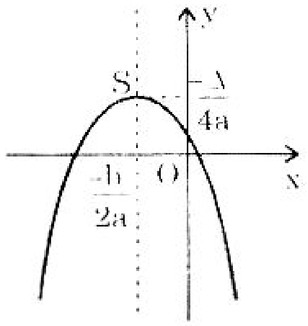


Với $a < 0$ đồng biến *trên* $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$

nghịch biến *trên* $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$

Đồ thị *là parabol có đỉnh* $S\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

với $\Delta = b^2 - 4ac$ *có trục đối xứng là đường thẳng song song với trục tung* $x = -\dfrac{b}{2a}$.



BÀI TẬP

59 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = x^2 - 4x + 3$.

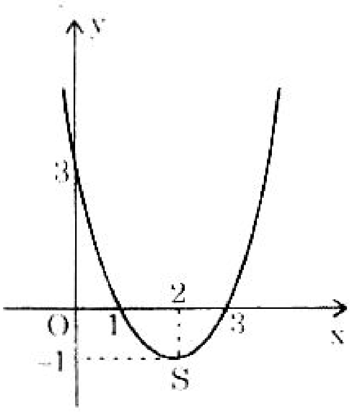
Giải

- Tập xác định D = R

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\dfrac{\Delta}{4}$	↗	$+\infty$

Với $\Delta = 4^2 - 4.3 = 4$



+ Vẽ đồ thị.

- Trục đối xứng : $x = -\dfrac{-4}{2} = 2$

Hoành độ đỉnh : $x = 2$, tung độ đỉnh : $y = -\dfrac{4}{4} = -1$

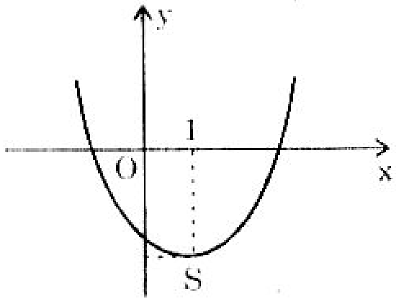
Đỉnh parabol : $S(2; -1)$

- Giao điểm của parabol với trục tung $M(0; 3)$

- Giao điểm của parabol với trục hoành $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$

Đồ thị hình trên.

60 Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ như ở hình bên. Dựa vào hình vẽ có thể nói gì về dấu của các hệ số a, b, c.



Giải

+ Trên hình, ta thấy parabol hướng bề lõm lên phía dương của trục tung nên hệ số $a > 0$.

+ Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm, chứng tỏ $c < 0$.

+ Đỉnh parabol có hoành độ dương, ta có $-\frac{b}{2a} > 0$ mà $a > 0$; suy ra : $b < 0$.

61 Xác định tọa độ của đỉnh và các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có)

a) $y = -2x^2 + 5x - 3$ **b)** $y = 2x^2 - x + 1$.

Giải

a) Hoành độ đỉnh : $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{-4} = \frac{5}{4}$

Tung độ đỉnh : $y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{-8} = \frac{1}{8}$

Đỉnh parabol : $S\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{8}\right)$

- Giao điểm của parabol với trục tung là $P(0; -3)$

- Giao điểm của parabol với trục hoành.

Xét : $-2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$

Các giao điểm với trục hoành $M(1; 0)$ và $N\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

b) Đỉnh $S\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{8}\right)$. Giao điểm với trục tung $P(0; 1)$, không có giao điểm với trục hoành.

62 Xác định các hệ số a, b, c của parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$, biết (P) đi qua các điểm $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$, $B\left(-1; \frac{7}{2}\right)$, $C(2; 2)$.

Giải

$$A \in P \Rightarrow \frac{3}{2} = a + b + c \quad (1)$$

$$B \in P \Rightarrow \frac{7}{2} = a - b + c \quad (2)$$

$$C \in P \Rightarrow 2 = 4a + 2b + c \quad (3)$$

Trừ (1) cho (2) ta được : $2b = -2$ suy ra $b = -1$

Cộng (1) và (2) ta được : $2(a + c) = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{2} - a$

Thay vào (3) giá trị của b và biểu thức của c ta được :

$$2 = 4a + \frac{5}{2} - a - 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 2$$

Parabol có phương trình : $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$.

63 Xác định các số a, b, c, biết rằng parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(1; -2)$ và có đỉnh $S\left(\frac{4}{7}; -\frac{25}{8}\right)$.

Giải

Gọi (P) là parabol $y = ax^2 + bx + c$

$A \in (P) \Rightarrow -2 = a + b + c$ (1)

$S\left(\frac{4}{7}; \frac{25}{8}\right)$ là đỉnh của (P) nên ta có các hệ thức

$$-\frac{b}{2a} = \frac{7}{4} \qquad (2)$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{25}{8} \qquad (3)$$

Giải hệ phương trình ba ẩn a, b, c gồm các phương trình (1), (2) và (3) ta được : $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$.

64 Cho parabol $(P) : y = \frac{1}{2}x^2$. Tịnh tiến (P) song song với trục hoành 2 đơn vị về bên phải ta được parabol (P_1).

Sau đó tịnh tiến (P_1) song song với trục tung 3 đơn vị xuống phía dưới ta được (P_2). Tìm phương trình của (P_1) và (P_2).

Giải

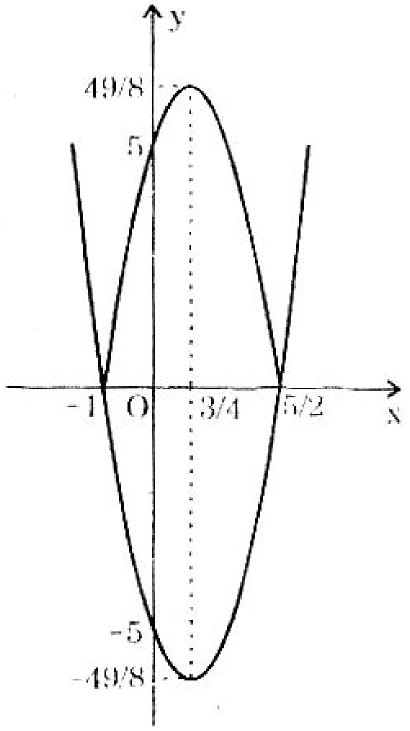
a) Phương trình của $(P_1) : y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$

b) Phương trình của $(P_2) : y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$.

65 **a)** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y_1 = 2x^2 - 3x - 5$.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y_2 = |2x^2 - 3x - 5|$.

Giải



a) Tập xác định D = R

Hàm số nghịch biến trong $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$

và đồng biến trong $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$

Đồ thị : là parabol có trục đối xứng $x = \frac{3}{4}$ đỉnh $S\left(\frac{3}{4}; -\frac{49}{8}\right)$ cắt trục hoành tại M(–1; 0) và $N\left(\frac{5}{2}; 0\right)$

b) Ta có :

$$y_2 = |y_1| = \begin{cases} y_1 & \text{nếu } y_1 \geq 0 \\ -y_1 & \text{nếu } y_1 < 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra đồ thị của hàm số $y_2 = |2x^2 - 3x - 5|$ gồm phần parabol $y_1 = 2x^2 - 3x - 5$ nằm phía trên trục hoành ghép với hình đối xứng đối với trục hoành của phần parabol $y_1 = 2x^2 - 3x - 5$ nằm phía dưới trục hoành.

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

+ *Phương trình **một ẩn** là mệnh đề chứa biến dạng* $f(x) = g(x)$ (1)

với $f(x)$, $g(x)$ *là các biểu thức chứa cùng biến x.*

***Điều kiện xác định** D của phương trình là điều kiện cho biến x để các phép toán có trong phương trình thực hiện được.*

Nếu có giá trị x_0 *thỏa mãn D sao cho* $f(x_0) = g(x_0)$ *là mệnh đề đúng thì* x_0 *là **một nghiệm** của phương trình (1)*

+ *Hai phương trình* $f_1(x) = g_1(x)$ (1)

$f_2(x) = g_2(x)$ (2)

*là **tương đương**, kí hiệu*

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$$

Nếu các tập nghiệm của chúng bằng nhau

+ *Phương trình (2) là **phương trình hệ quả** của phương trình (1) kí hiệu*

$$f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$$

nếu tập nghiệm của (2) chứa tập nghiệm của (1)

+ ***Giải và biện luận phương trình ax + b = 0***

- *Nếu* $a \neq 0$*, phương trình có **nghiệm duy nhất*** $x = -\dfrac{b}{a}$
- *Nếu* $a = 0$, $b \neq 0$*, phương trình **vô nghiệm***
- *Nếu* $a = 0$, $b = 0$*, mọi* $x \in R$ *đều là nghiệm.*

+ ***Giải và biện luận phương trình hai ẩn dạng :*** $ax + by = c$ (3)

- *Nếu có một cặp số* $(x_0; y_0)$ *sao cho* $ax_0 + by_0 = c$ *thì* $(x_0; y_0)$ *là một nghiệm của (3)*
- *Nếu* $a \neq 0$, $b \neq 0$ *thì (3) có vô số nghiệm là các cặp số (x; y) với*

$$\begin{cases} x \text{ là số tùy ý} \\ y = \dfrac{c - ax}{b} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = \dfrac{c - by}{a} \\ y \text{ là số tùy ý} \end{cases}$$

Biểu diễn tập nghiệm trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng $ax + by = c$ *là đồ thị hàm số* $y = \frac{-ax}{b} + \frac{c}{b}$.

- *Nếu* $a \neq 0$, $b = 0$ *phương trình (3) có vô số nghiệm có dạng :* $\left(\frac{c}{a}; y\right)$, *y là số tùy ý. Tập nghiệm biểu diễn bằng đường thẳng song song với trục tung cắt trục hoành tại điểm* $P\left(\frac{c}{a}; 0\right)$.
- *Nếu* $a = 0$, $b \neq 0$ *các nghiệm của (3) là* $\left(x; \frac{c}{b}\right)$ *với x là số tùy ý. Hình biểu diễn tập nghiệm là đường thẳng song song với trục hoành cắt trục tung tại điểm* $Q\left(0; \frac{c}{b}\right)$.

BÀI TẬP

66 Giải phương trình : **a)** $\frac{2x-3}{2} = \frac{4x+3}{3}$ (1)

b) $\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$ (2)

Giải

a) Nhân hai vế với 6, ta được :

$(1) \Leftrightarrow \quad 3(2x-3) = 2(4x+3) \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -15 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{15}{2}$

b) ĐKXĐ : $x \neq 0$

(vì với mọi x thì $x^2 + x + 1 \neq 0$, $x^2 - x + 1 \neq 0$, $x^4 + x^2 + 1 \neq 0$)

Do $\quad x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

ta có mẫu thức chung là : $x(x^4 + x^2 + 1)$

Quy đồng mẫu thức và khử mẫu thức chung ta được :

$$x(x+1)(x^2-x+1) - x(x-1)(x^2+x+1) = 3$$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$ (nhận vì thỏa mãn điều kiện $x \neq 0$)

67 Giải phương trình

a) $\frac{15-x}{2002} + \frac{17-x}{2004} + \frac{19-x}{2006} = 3$ (1)

b) $\dfrac{x-2008}{2001}+\dfrac{x-2006}{2003}+\dfrac{x-2004}{2005}=\dfrac{x-2001}{2008}+\dfrac{x-2003}{2006}+\dfrac{x-2005}{2004}$ (2)

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow \dfrac{15-x}{2002}-1+\dfrac{17-x}{2004}-1+\dfrac{19-x}{2006}-1=0$

$$\Leftrightarrow \dfrac{-1987-x}{2002}+\dfrac{-1987-x}{2004}+\dfrac{-1987-x}{2006}=0$$

$$\Leftrightarrow (1987+x)\left(\dfrac{1}{2002}+\dfrac{1}{2004}+\dfrac{1}{2006}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1987$$

b) $(2) \Leftrightarrow \dfrac{x-2008}{2001}-1+\dfrac{x-2006}{2003}-1+\dfrac{x-2004}{2005}-1=$

$$=\dfrac{x-2001}{2008}-1+\dfrac{x-2003}{2006}-1+\dfrac{x-2005}{2004}-1$$

$$\Leftrightarrow (x-4009)\left[\dfrac{1}{2001}+\dfrac{1}{2003}+\dfrac{1}{2005}-\dfrac{1}{2004}-\dfrac{1}{2006}-\dfrac{1}{2008}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x-4009=0 \Leftrightarrow x=4009.$$

68 Giải và biện luận theo tham số m phương trình :

$$4x-2=m(mx-1) \qquad (1)$$

Giải

$(1) \Leftrightarrow m-2=(m^2-4)x \Leftrightarrow (m-2)(m+2)x=m-2$

- Nếu $m \neq \pm 2$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{m-2}{m^2-4}=\dfrac{1}{m+2}$
- Nếu $m=2$ thì (1) trở thành $0x=0$.

  Mọi số thực đều là nghiệm của (1).
- Nếu $m=-2$ thì (1) có dạng $0x=-4$. Vô nghiệm.

69 Giải và biện luận theo tham số m phương trình :

a) $\dfrac{2m-1}{x-2}=m-3$ (1) **b)** $\dfrac{x+m}{x+3}+\dfrac{x-3}{x-m}=2$ (2)

Giải

a) Điều kiện xác định : $x \neq 2$

$(1) \Rightarrow (m-3)(x-2)=2m-1$

Nếu $m=3$, phương trình vô nghiệm

Nếu $m \neq 3$ ta có : $(m-3)x = 4m-7 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{4m-7}{m-3}$

Ta xác định giá trị của m để $\dfrac{4m-7}{m-3} \neq 2$

$$\frac{4m-7}{m-3} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{1}{2}$$

Như vậy : nếu $m = 3$ hoặc $m = \dfrac{1}{2}$ phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu $m \neq 3$, $m \neq \dfrac{1}{2}$ phương trình có nghiệm $x = \dfrac{4m-7}{m-3}$.

b) Điều kiện xác định : $x \neq -3$, $x \neq m$

$(2) \Rightarrow \quad (x^2 - m^2) + x^2 - 9 = 2(x+3)(x-m)$

$\Rightarrow \quad 2(m-3)x = m^2 - 6m + 9$

Nếu $m = 3$, phương trình trở thành $0x = 0$. Mọi số thực đều là nghiệm.

Nếu $m \neq 3$ thì $x = \dfrac{1}{2}(m-3)$. Phương trình có nghiệm nếu $\dfrac{1}{2}(m-3) \neq -3$ và $\dfrac{1}{2}(m-3) \neq m$, tức là $m \neq -3$.

Kết luận :

- Nếu $m \neq \pm 3$, thì (2) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2}(m-3)$
- Nếu $m = 3$ thì mọi số thực đều là nghiệm.
- Nếu $m = -3$ phương trình vô nghiệm.

70 Giải và biện luận theo tham số m phương trình :

$$|x+m| = |x-m+2| \qquad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + m = x - m + 2 & (A) \\ x + m = -x + m - 2 & (B) \end{array}\right.$$

$(A) \Leftrightarrow \quad 0x = 2m - 2$

- Nếu $m = 1$, mọi số thực là nghiệm của (A).
- Nếu $m \neq 1$ thì (A) vô nghiệm.

$(B) \Leftrightarrow \quad 2x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

Kết luận : Nếu $m \neq 1$ thì (1) có nghiệm $x = -1$.

Nếu $m = 1$ thì mọi số thực đều là nghiệm của (1).

71 Cho các phương trình với ẩn số x :

$$3mx + 1 = 2(m - x) \qquad (1)$$

$$m(5x - 1) = 2x + 1 \qquad (2)$$

Tìm các giá trị của m để hai phương trình có chung nghiệm.

Giải

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $(3m + 2)x = 2m - 1$

Nếu $3m + 2 \neq 0$, tức là $m \neq -\frac{2}{3}$ thì (1) có nghiệm : $x = \frac{2m - 1}{3m + 2}$

(2) $\Leftrightarrow$ $(5m - 2)x = m + 2$

Nếu $5m - 2 \neq 0$, tức là nếu $m \neq \frac{2}{5}$ thì (2) có nghiệm : $x = \frac{m + 1}{5m - 2}$

Để (1) và (2) có chung nghiệm thì ta phải có :

$$\begin{cases} m \neq -\frac{2}{3},\ m \neq \frac{2}{5} \\ \frac{2m - 1}{3m + 2} = \frac{m + 1}{5m - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad m = 0,\ m = 2.$$

Thử lại, với m = 0, hai phương trình có nghiệm chung $x = -\frac{1}{2}$,

với m = 2, hai phương trình có nghiệm chung $x = \frac{3}{8}$.

2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. *Công thức nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$*

Biệt thức của phương trình : $\Delta = b^2 - 4ac$ $(\Delta' = b'^2 - ac)$

- *Nếu* $\Delta > 0$, *phương trình có hai nghiệm phân biệt*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Nếu* $\Delta = 0$, *phương trình có nghiệm số kép :* $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

- *Nếu* $\Delta < 0$, *phương trình vô nghiệm.*

2. *Định lí Vi-et*

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ *có các nghiệm* x_1 *và* x_2 *thì*

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad P = x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Vài ứng dụng của định lí Vi-et.

***a)** Nhẩm nghiệm :*

Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm $x = 1$ còn nghiệm kia $x_2 = \frac{c}{a}$

Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm $x = -1$ còn nghiệm kia bằng $-\frac{c}{a}$.

***b)** Nếu hai số có tổng bằng S và tích của chúng bằng P thì các số này là các nghiệm của phương trình*

$$X^2 - SX + P = 0$$

***c)** Phân tích tam thức bậc hai*

Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ có các nghiệm x_1 và x_2 thì

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

BÀI TẬP

72 Giải phương trình : **a)** $\frac{2}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{x + 1} + \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$ (1)

b) $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7$ (2)

Giải

a) Điều kiện xác định $x \neq -1$ (vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0\ \forall x \in R$)

Quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu thức chung ta được :

$$2(x + 1) = (x^2 - x + 1) + 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1, \qquad x_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2$$

Loại nghiệm $x_1 = -1$ không thỏa ĐKXĐ. Tập nghiệm của (1) là $S = \{2\}$.

b) (2) $\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 5 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} - 12 = 0$

Điều kiện : $x^2 - 3x + 5 \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 5} \geq 0$ thì được :

$$t^2 + t - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 48}}{2} = -4 \text{ (loại)},$$

$$t_2 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2} = 3 \text{ (nhận)}$$

Giải phương trình :

$$\sqrt{x^2-3x+5}=3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x+5=9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1=\frac{3-\sqrt{9+16}}{2}=-1;\ x_2=\frac{3+\sqrt{9+16}}{2}=4$$

Các nghiệm $x=-1$ và $x=4$ thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy tập nghiệm của (2) là $S=\{-1;4\}$.

73 Giải và biện luận phương trình theo tham số m :

a) $mx^2-(2m+1)x+m-5=0$ (1)

b) $(m+1)x^2-2(m+2)x+m-3=0$ (2)

Giải

a) Nếu $m=0$ thì (1) có dạng : $-x-5=0 \Leftrightarrow x=-5$

Nếu $m\neq 0$ thì (1) là phương trình bậc hai có biệt thức

$$\Delta=(2m+1)^2-4m(m-5)=24m+1$$

- Nếu $m<-\frac{1}{24}$ thì $\Delta<0$, phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $m=-\frac{1}{24}$ thì $\Delta=0$, (2) có nghiệm $x_1=x_2=\frac{2m+1}{2m}=-23$
- Nếu $m>-\frac{1}{24}$ và $m\neq 0$ thì (2) có 2 nghiệm phân biệt :

$$x_1=\frac{2m+1-\sqrt{\Delta}}{2m} \quad \text{và} \quad x_2=\frac{2m+1+\sqrt{\Delta}}{2m}.$$

b)
- Nếu $m=-1$ thì (2) trở thành $-2x-4=0 \Leftrightarrow x=-2$
- Nếu $m\neq -1$ thì (2) là phương trình bậc hai có biệt thức

$$\Delta'=(m+2)^2-(m+1)(m-3)=6m+7$$

- Nếu $m<-\frac{7}{6}$ thì (2) vô nghiệm.
- Nếu $m=-\frac{7}{6}$ thì (2) có nghiệm $x=-5$.
- Nếu $m>-\frac{7}{6}$, $m\neq -1$ thì (2) có 2 nghiệm $x_{1,2}=\frac{m+2\pm\sqrt{6m+7}}{m+1}$.

74 Cho phương trình

$$a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)=0 \qquad (1)$$

trong đó a, b, c là 3 số thực không đồng thời bằng 0.

Hãy tìm điều kiện đối với a, b, c để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Giải

Khai triển và thu gọn vế trái (1) ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \quad (a+b+c)x^2 - 2(ab+bc+ca)x + 3abc = 0 \qquad (2)$$

- Nếu a + b + c = 0 thì (2) tương đương với

$$(ab+bc+ca)x - 3abc = 0 \qquad (3)$$

Khi đó ta có : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 0$

$$\Rightarrow \quad ab + bc + ca = -\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \neq 0$$

(do a, b, c không đồng thời bằng 0)

Phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3abc}{ab+bc+ca}$

- Nếu a + b + c ≠ 0 thì (2) là phương trình bậc hai có biệt thức :

$$\Delta' = (ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c)$$

$$= \frac{1}{2}[(ab-ac)^2 + (ab-bc)^2 + (ac-bc)^2]$$

Phương trình (2) có nghiệm duy nhất khi

$$\begin{cases} a+b+c \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c \neq 0 \\ ab-ac=0 \\ ab-bc=0 \\ ac-bc=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c\neq 0$$

Kết luận : Phương trình (1) có nghiệm duy nhất nếu a + b + c = 0

a, b, c không đồng thời bằng 0 hoặc a = b = c ≠ 0.

75 Cho các phương trình $x^2 + bx + c = 0 \quad (1)$

$x^2 + cx + b = 0 \quad (2)$

trong đó b, c là hai số thực thỏa mãn hệ thức $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2}$.

Chứng minh rằng có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Giải

Biệt thức của các phương trình (1) và (2) theo thứ tự là :

$$\Delta_1 = b^2 - 4c, \quad \Delta_2 = c^2 - 4b$$

Suy ra : $\Delta_1 + \Delta_2 = b^2 + c^2 - 4(b + c)$

Giả sử $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$ thì : $\Delta_1 + \Delta_2 = b^2 + c^2 - 4(b + c) < 0$.

$$\Rightarrow \quad b^2 + c^2 < 4(b + c) \qquad (*)$$

Từ hệ thức : $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(b + c) = bc$

Thay vào bất đẳng thức (*) ta có : $b^2 + c^2 < 2bc \Rightarrow (b - c)^2 < 0$ vô lí.

Vậy có ít nhất một biệt thức không âm. Do đó có ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.

76 Cho các phương trình với tham số m : $x^2 + mx + 2 = 0 \quad (1)$

$$x^2 + 2x + m = 0 \qquad (2)$$

Với giá trị nào của m hai phương trình có ít nhất một nghiệm chung

Giải

Để cả hai phương trình (1) và (2) đều có nghiệm thì phải có

$$\begin{cases} \Delta_1 = m^2 - 8 \geq 0 \\ \Delta_2 = 1 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m \leq -2\sqrt{2}$$

Giả sử x = k là một nghiệm chung của (1) và (2) ta có :

$$k^2 + mk + 2 = k^2 + 2k + m \quad \Leftrightarrow \quad (m - 2)k = m - 2$$

Từ điều kiện $m \leq -2\sqrt{2}$ ta có : $m - 2 \neq 0$ và $k = \frac{m - 2}{m - 2} = 1$

Thay k = 1 vào (1) ta được : $1 + m + 2 = 0 \Rightarrow m = -3$

Thay m = −3 vào 2 phương trình ta thấy (1) có hai nghiệm là 1 và 2, phương trình (2) có các nghiệm 1 và −3. Nghiệm chung là x = 1.

77 Cho phương trình với tham số m : $5x^2 + mx - 28 = 0 \quad (1)$

Tìm giá trị của m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức

$$5x_1 + 2x_2 = 1.$$

Giải

Do $ac = 5.(-28) < 0$ nên chắc chắn (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo định lí Vi-et ta có :

$$x_1 + x_2 = -\frac{m}{5}, \qquad x_1x_2 = -\frac{28}{5}.$$

$$5x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) + 3x_1 = -\frac{2m}{5} + 3x_1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{2m}{5} + 1\right) = \frac{2m+5}{15}$$

$$x_2 = -\frac{m}{5} - x_1 = -\frac{m}{5} - \frac{2m+5}{15} = -\frac{m+1}{3}$$

$$x_1.x_2 = \left(\frac{2m+5}{15}\right)\left(-\frac{m+3}{3}\right) = -\frac{28}{5} \quad \Leftrightarrow \quad m = -13,\ m = \frac{19}{2}.$$

78 Cho phương trình với tham số a : $x^2 - 6ax + 5a^2 = 0$ (1)

a) Chứng tỏ rằng phương trình (1) luôn có nghiệm.

b) Không giải phương trình hãy tính tổng và tích của các nghiệm.

Giải

a) $\Delta' = (3a)^2 - 5a^2 = 4a^2 \geq 0 \ \forall a \in R$. Phương trình luôn có nghiệm

b) Theo định lí Vi-et, nếu x_1, x_2 là các nghiệm của (1) thì :

$$x_1 + x_2 = 6a, \qquad x_1x_2 = 5a^2.$$

79 Tính nhẩm nghiệm của các phương trình :

a) $2x^2 + 7x + 5 = 0$ **b)** $3x^2 - 8x + 5 = 0$

c) $1986x^2 + 2006x + 20 = 0$.

Giải

a) $a - b + c = 2 - 7 + 5 = 0$. Phương trình có nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{5}{2}$.

b) $a + b + c = 3 - 8 + 5 = 0$. Phương trình có nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{3}$.

c) $a - b + c = 1986 - 2006 + 20 = 0$.

Phương trình có nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{10}{993}$.

80 Cho phương trình : $x^2 + px + q = 0$ (1)

trong đó p, q là các số khác 0. Biết phương trình (1) có nghiệm khác 0. Hãy lập phương trình có các nghiệm là nghịch đảo của nghiệm của phương trình (1).

Giải

Giả sử (1) có các nghiệm là x_1, x_2

Ta có : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-p}{q}$; $\quad \frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2} = \frac{1}{q}$

Phương trình có các nghiệm $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ là :

$$x^2 - \frac{p}{q}x + \frac{1}{q} = 0 \Leftrightarrow qx^2 - px + 1 = 0.$$

81 Tìm các số u, v biết :

a) $u + v = 9, \quad uv = 20.$ **b)** $u + v = 11, \quad uv = 28.$

Giải

a) Các số u, v là các nghiệm của phương trình $x^2 - 9x + 20 = 0$

Các nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = 5$ hoặc 4

Vậy $u = 5, v = 4$ hoặc $u = 4, v = 5$.

b) Đáp số : $u = 4, v = 7$.

82 Cho phương trình với tham số m : $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 1 = 0.$

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình luôn có nghiệm.

b) Tìm một hệ thức giữa các nghiệm không phụ thuộc m.

Giải

a) $\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + m - 1) = 5 > 0 \ \forall m$, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

b) Theo định lí Vi-et : $x_1 + x_2 = 2m + 1 \quad (*)$

$x_1 . x_2 = m^2 + m - 1 \quad (**)$

Từ (*) ta có : $m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 1).$

Thay vào (**) ta được : $x_1x_2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 1) - 1$

$\Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2)^2 = 5$ không phụ thuộc m.

83 Cho phương trình với tham số m : $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 5 = 0 \quad (1)$

a) Với giá trị nào của m phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của (1). Hãy xác định giá trị của m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 + 10x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

a) $\Delta = m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -2$ hoặc $m > 2$

b) $A = x_1^2 + x_2^2 + 10x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 8x_1x_2$

$= 4(m + 1)^2 + 8(2m + 5) = 4(m + 3)^2 + 8 \geq 8 \ \forall m$

A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8 khi $m = -3$.

3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng : $(I)\ \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$

trong đó (1) và (2) là các phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ta gọi là định thức của hệ phương trình (I)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Kí hiệu $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,\quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$

- *Nếu $D \neq 0$, hệ (I) có nghiệm duy nhất được xác định như sau :*

$$x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D}$$

- *Nếu $D = 0$, $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ hệ (I) vô nghiệm.*
- *Nếu $D = 0$, $D_x = D_y = 0$ nghiệm của hệ là nghiệm của phương trình (1) (tức cũng là nghiệm của (2)).*

BÀI TẬP

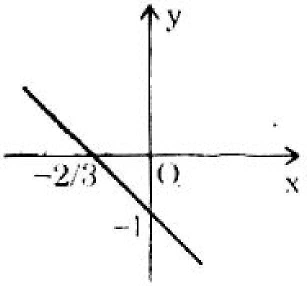
84 Giải phương trình và biểu diễn nghiệm trên mặt phẳng tọa độ

a) $3x + 2y + 2 = 0$ (1) **b)** $0x + 2y + 3 = 0$ (2)

Giải

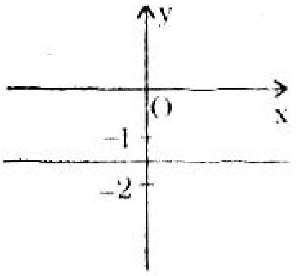
a) Phương trình có vô số nghiệm. Công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1) là :

$$\begin{cases} x \in R \\ y = -\dfrac{3x}{2} - 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}y - \dfrac{2}{3} \\ y \in R \end{cases}$$



Tập nghiệm được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng, đồ thị hàm số $y = -\dfrac{3}{2}x - 1$.

b) (2) $\Leftrightarrow$ $y = -\dfrac{3}{2}$.



Công thức nghiệm tổng quát là : $\begin{cases} x \in R \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Tập nghiệm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng song song và trục hoành cắt trục tung tại điểm $P\left(0; -\dfrac{3}{2}\right)$.

85 Cho phương trình với các ẩn số x, y :

$$(2m - 1)x + 2y + m + 3 = 0 \qquad (1)$$

Xác định giá trị của tham số m để cặp số (−1; 2) là một nghiệm của (1).

Giải

Điều kiện cần và đủ để cặp số (−1; 2) là nghiệm của (1) là :

$$(2m - 1)(-1) + 2.2 + m + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 8$$

86 Giải các hệ phương trình :

a) (I) $\begin{cases} 0,5x + 2y = 3 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$ **b)** (II) $\begin{cases} \dfrac{11}{2x - 3y} + \dfrac{18}{3x - 2y} = 13 \\ \dfrac{27}{3x - 2y} - \dfrac{2}{2x - 3y} = 1 \end{cases}$.

Giải

a) Theo quy tắc Crame, định thức của hệ (I) là :

$$D = \begin{vmatrix} 0,5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,5.1 - 2.3 = -5,5 \neq 0$$

Hệ (I) có nghiệm là : $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{-5,5} = \dfrac{10}{11}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 0,5 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-5,5} = \dfrac{14}{11}$.

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{10}{11}; \dfrac{14}{11}\right)$.

b) Đặt $\dfrac{1}{2x - 3y} = u$, $\dfrac{1}{3x - 2y} = v$,

thì hệ phương trình (II) có dạng : (II') $\begin{cases} 11u + 18v = 13 \\ -2u + 27v = 1 \end{cases}$

Áp dụng quy tắc Crame cho hệ (II') ta có :

$$D = \begin{vmatrix} 11 & 18 \\ -2 & 27 \end{vmatrix} = 333, \qquad D_u = \begin{vmatrix} 13 & 18 \\ 1 & 27 \end{vmatrix} = 333, \qquad D_v = \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 37$$

$$u = \frac{D_u}{D} = 1, \qquad v = \frac{D_v}{D} = \frac{37}{333} = \frac{1}{9}$$

Thay các biểu thức của u và v bằng 1 và $\dfrac{1}{9}$ ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x - 3y} = 1 \\ \dfrac{1}{3x - 2y} = \dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \quad (II) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$$

Giải hệ (III) ta được : $x = \dfrac{\begin{vmatrix}1 & -3\\ 9 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -2\end{vmatrix}} = 5$, $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -2\end{vmatrix}} = 3$

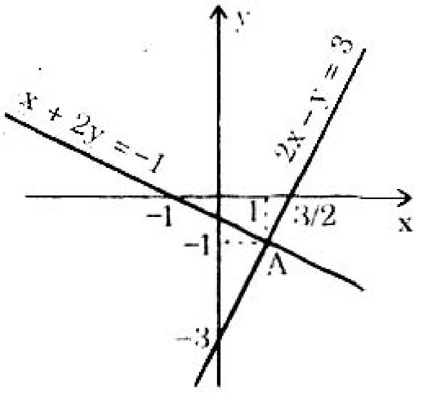
Kết luận của hệ (II) là (5; 3).

87 Giải các hệ phương trình sau đây bằng phương pháp đồ thị và kiểm tra bằng tính toán :

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ (I) $\qquad$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases}$ (II)

Giải

a) (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \end{cases}$

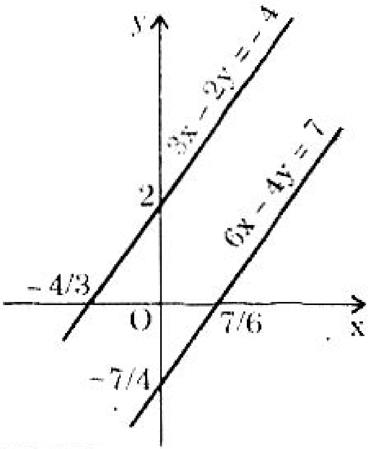


Vẽ đồ thị các hàm số $y = 2x - 3$ và $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ (hình bên). Tọa độ giao điểm của hai đồ thị là A(1; −1). Nghiệm của hệ (I) là (1; −1).

Kiểm tra bằng tính toán về nghiệm của hệ (I) :

$$x = \dfrac{\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}} = \dfrac{5}{5} = 1; \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}} = \dfrac{-5}{5} = -1$$

b) (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x + 2 \\ y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4} \end{cases}$



Trên cùng một hệ trục tọa độ, đồ thị các hàm số $y = \dfrac{3}{2}x + 2$ và $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4}$ là các đường thẳng song song. Vậy hệ (II) vô nghiệm.

Kiểm tra lại bằng tính toán. Ta có định thức của hệ (II) :

$$D = \begin{vmatrix}3 & -2\\ 6 & -4\end{vmatrix} = 3.(-4) - 6(-2) = 0, \qquad D_x = \begin{vmatrix}-4 & -2\\ 7 & -4\end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

Vậy hệ (II) vô nghiệm.

88 Với giá trị nào của m hệ phương trình sau vô nghiệm :

$$(I)\ \begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$$

Giải

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & -3m \end{vmatrix} = -m^2 - 3m, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2m + 3 & -3m \end{vmatrix} = 2m^2 - 6m$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 2m + 3 \end{vmatrix} = m + 3.$$

Hệ (I) vô nghiệm khi $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y \neq 0$.

Điều này xảy ra khi $\begin{cases} m^2 + 3m = 0 \\ m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m = 0$

- *Ghi chú* : ta cũng có thể dùng phương pháp thế giải như sau :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - my \\ m(1 - my) - 3my = 2m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - my \\ -(m^2 + 3m)y = m + 3 \end{cases}$$

Hệ (I) vô nghiệm nếu $-(m^2 + 3m)y = m + 3$ vô nghiệm. Điều này xảy ra khi $m^2 + 3m = 0$ và $m + 3 \neq 0$, tức là khi $m = 0$.

89 Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m :

$$(I)\ \begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$$

Giải

Ta có : $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1, \qquad D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \pm 1$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m + 1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & m + 1 \end{vmatrix} = m^2 - m$$

- Nếu $D \neq 0$, tức là nếu $m \neq \pm 1$ hệ (I) có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2m^2 - m - 1}{m^2 - 1} = \dfrac{(m - 1)(2m + 1)}{(m - 1)(m + 1)} = \dfrac{2m + 1}{m + 1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m^2 - m}{m^2 - 1} = \dfrac{(m - 1)m}{(m - 1)(m + 1)} = \dfrac{m}{m + 1} \end{cases}$$

- Nếu $m = 1$ thì $D = D_x = D_y = 0$, hệ (I) có vô số nghiệm là các nghiệm của phương trình $x + y = 2$.
- Nếu $m = -1$ thì $D = 0$, $D_x = 2$, $D_y = 2$, hệ (I) vô nghiệm.

90 Giải hệ phương trình : (I) $\begin{cases} 3|x| + 5y = 9 & (1) \\ 2x - |y| = 7 & (2) \end{cases}$

Giải

Từ (2) ta có : $2x = |y| + 7$. suy ra điều kiện $x > 0$

- Nếu $y \geq 0$ thì hệ (I) trở thành : $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{44}{13} \\ y = -\dfrac{4}{13} \text{ (loại)} \end{cases}$

- Nếu $y < 0$ thì hệ (I) trở thành : $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{26}{7} \\ y = -\dfrac{3}{7} \text{ (nhận)} \end{cases}$

Tóm lại hệ (I) có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{26}{7}; -\dfrac{3}{7}\right)$.

91 Giải hệ phương trình : (I) $\begin{cases} 3x - \dfrac{1}{2y} = 5 & (1) \\ 3 - 2y = 2xy & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $y \neq 0$. Chia hai vế (2) cho y thì (I) trở thành

$$\begin{cases} 3x - \dfrac{1}{2y} = 5 \\ \dfrac{3}{y} - 2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \dfrac{1}{2y} = 5 \\ -2x + \dfrac{3}{y} = 2 \end{cases}$$

Đặt $\dfrac{1}{y} = u$ ta được : $\begin{cases} 3x - \dfrac{1}{2}u = 5 \\ -2x + 3u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ u = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

92 Cho hệ phương trình : $\begin{cases} mx + 4y = m^2 + 4 \\ x + (m+3)y = 2m + 3 \end{cases}$

Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện $x \geq y$.

Giải

$$D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m+3 \end{vmatrix} = m^2 + 3m - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1,\ m = -4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m^2+4 & 4 \\ 2m+3 & m+3 \end{vmatrix} = m(m^2+3m-4)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m^2+4 \\ 1 & 2m+3 \end{vmatrix} = m^2+3m-4$$

Hệ có nghiệm duy nhất nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1,\ m \neq -4$. Khi đó :

$$x = \frac{D_x}{D} = m, \qquad y = \frac{D_y}{D} = 1$$

Điều kiện $x \geq y \Leftrightarrow m \geq 1$.

Do đó, điều kiện $m \neq 1,\ m \neq -4$ nên ta kết luận : Với $m > 1$ hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x \geq y$.

93 Giải hệ phương trình : $(I)\ \begin{cases} 2x + y + z = 4 & (1) \\ x + 2y - 3z = 7 & (2) \\ 3x - y + 2z = 3 & (3) \end{cases}$

Giải

CÁCH 1 : Phương pháp cộng đại số

Nhân (2) với −2 rồi cộng với (1), nhân (2) với −3 rồi cộng với (3) ta được :

$$(I) \Leftrightarrow (III)\ \begin{cases} x + 2y - 3z = 7 & (1) \\ -3y + 7z = -10 & (2) \\ -7y + 11z = -18 & (3) \end{cases}$$

Trong hệ (III) ta lại nhân (2) với $-\frac{7}{3}$ rồi cộng với (3) thì được :

$$(III) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 7 & (1) \\ -3y + 7z = -10 & (2) \\ -\frac{16}{3}z = \frac{16}{3} & (3) \end{cases} \Rightarrow \quad z = -1,\ y = 1,\ x = 2.$$

CÁCH 2 : Phương pháp thế :

Từ phương trình (2) của hệ (I) rút ra : $x = 7 - 2y + 3z$ rồi thế vào các phương trình còn lại thì được :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 7 \\ 2(7 - 2y + 3z) + y + z = 4 \\ 3(7 - 2y + 3z) - y + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 7 \\ -3y + 7z = -10 \\ -7y + 11z = -18 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình hai ẩn : $\begin{cases} -3y + 7z = -10 \\ -7y + 11z = -18 \end{cases}$

ta được : $y = 1$, $z = -1$, suy ra $x = 2$.

4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

a) *Hệ gồm một phương trình bậc nhất, một phương trình bậc hai*

Phương pháp giải

- *Từ phương trình bậc nhất, biểu thị một ẩn theo ẩn kia*
- *Thế vào phương trình bậc hai rồi giải.*

b) *Hệ phương trình đối xứng*

Dạng $\begin{cases} f(x;y) = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$ *với* $\begin{cases} f(y;x) = f(x;y) \\ g(y;x) = g(x;y) \end{cases}$

Phương pháp giải

Đặt $S = x + y$, $P = xy$. *Biểu diễn* $f(x;y)$, $g(x;y)$ *qua* S *và* P *rồi giải.*

c) Hệ đẳng cấp bậc hai chứa 2 ẩn

Phương pháp giải. Đặt $y = tx$ *rồi thế vào trong phương trình rồi giải theo* t.

BÀI TẬP

94 Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 & (1) \\ 2x + xy + 2y = -3 & (2) \end{cases}$

Giải

Hệ (I) là hệ phương trình đối xứng loại (I).

Đặt $P = xy$, $S = x + y$ thì (1) trở thành $S^2 - P = 3$

và (2) trở thành $2S + P = -3$

và hệ (I) trở thành hệ (I') $\begin{cases} S^2 - P = 3 & (3) \\ 2S + P = -3 & (4) \end{cases}$

Giải hệ (I') ta được $S = 0$, $P = -3$ hoặc $S = -2$, $P = 1$

Ta có : $\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy hệ (I) có 3 nghiệm là : $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ và $(-1; -1)$.

95 Giải hệ phương trình : (I) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 & (1) \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 & (2) \end{cases}$

Giải

Đây là hệ có các phương trình mà các hạng tử chứa ẩn là đẳng cấp bậc hai. Ta đặt $y = tx$ thì hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} x^2 - 3tx^2 + t^2x^2 = -1 & (3) \\ 3x^2 - tx^2 + 3t^2x^2 = 13 & (4) \end{cases}$$

Chia vế với vế (3) cho (4) thì được :

$$\frac{1 - 3t + t^2}{3 - t + 3t^2} = -\frac{1}{13} \qquad (5)$$

Vì $3 - t + 3t^2 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} > 0$ với mọi t nên

$$(5) \Leftrightarrow \quad 13(1 - 3t + t^2) = -(3 - t + 3t^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 16t^2 - 40t + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = 2$$

Với $t = \frac{1}{2}$ thì (3) trở thành : $-\frac{x^2}{4} = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

Ta có : $\begin{cases} x = 2 \\ y = tx = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -2 \\ y = tx = -1 \end{cases}$

Với $t = 2$ thì (3) trở thành : $-x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = tx = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = tx = -2 \end{cases}$$

Hệ (I) đã cho có bốn nghiệm là : (2; 1), (–2; –1), (1; 2), (–1; –2).

Ghi chú : Hệ (I) cũng là hệ phương trình đối xứng loại I.

Ta biểu diễn (1) và (2) qua $S = x + y$ và $P = xy$ thì được :

$$(I) \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow (A) \begin{cases} S^2 - 5P = -1 \\ 3S^2 - 7P = 13 \end{cases}$$

Giải hệ (A) ta được : $S = 3$, $P = 2$ và $S = -3$, $P = 2$

Với $S = 3$, $P = 2$ ta được các nghiệm của (I) là : (2; 1) và (1; 2)

Với $S = -3$, $P = 2$ ta được các nghiệm của (I) là : (–2; –1) và (–1; –2).

MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

96 Giải hệ phương trình : (I) $\begin{cases} x + xy + y = -1 & (1) \\ x^2y + y^2x = -2 & (2) \end{cases}$

Giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y) + xy = -1 \\ xy(x+y) = -2 \end{cases}, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ta được các nghiệm của hệ (I) là : $(-1; -1), (-2; 1), (1; -2)$.

97 Giải hệ phương trình : (I) $\begin{cases} x(x+2)(2x+y) = 9 & (1) \\ x^2 + 4x + y = 6 & (2) \end{cases}$

Giải

Đặt $u = x(x+2)$, $v = 2x + y$ thì (I) trở thành

$$\begin{cases} uv = 9 \\ u + v = 6 \end{cases} \Rightarrow u = v = 3 \Leftrightarrow x = 1, y = 1 \text{ và } x = -3, y = 9.$$

98 Giải hệ phương trình :

a) (I) $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y & (1) \\ y^3 = 3y + 8x & (2) \end{cases}$ **b)** (II) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^5 + y^5 = x^2 + y^2 \end{cases}$

Giải

a) Trừ vế với vế (1) và (2)

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ x^3 - y^3 = 5(y - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 5) = 0 \end{cases}$$

Do $x^2 + xy + y^2 + 5 > 0$. Suy ra :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt{11} \\ y = \sqrt{11} \end{cases}, \begin{cases} x = -\sqrt{11} \\ y = -\sqrt{11} \end{cases}$$

b) $$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y^2(x + y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 1 \\ x^2y^2(x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

99 Cho hệ phương trình : (I) $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = m \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = 12.

b) Với những giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Giải

a) Đặt $u = x + x^2 = x(x+1)$, $v = y + y^2 = y(y+1)$

thì hệ trở thành : $\begin{cases} u + v = 8 \\ uv = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 6 \\ v = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 2 \\ v = 6 \end{cases}$

$+ \begin{cases} x^2 + x = 6 \\ y^2 + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3,\ x = 2 \\ y = 1,\ y = -2 \end{cases}$

$+ \begin{cases} x^2 + x = 2 \\ y^2 + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1,\ x = -2 \\ y = -3,\ y = 2 \end{cases}$

Hệ (I) có nghiệm :

(–3; 1), (–3; –2), (2; 1), (2; –2), (1; –3), (1; 2), (–2; –3) và (–2; 2).

b) $u = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + x - u = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4u+1}}{2}$

ĐK : $u \geq -\dfrac{1}{4}$

Tương tự $v = y^2 + y$ có nghiệm với điều kiện $v \geq -\dfrac{1}{4}$

Hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi $u \geq -\dfrac{1}{4}$, $v \geq -\dfrac{1}{4}$

tương đương phương trình $t^2 - 8t + m = 0$ có 2 nghiệm đều không nhỏ hơn $-\dfrac{1}{4}$.

Điều này xảy ra nếu và chỉ nếu :

$$\begin{cases} \Delta' = 16 - m \geq 0 \\ -\dfrac{1}{4} \leq 4 - \sqrt{16 - m} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{33}{16} \leq m \leq 16.$$

100 Cho phương trình với tham số m

$$(m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0 \qquad (1)$$

Xác định giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

Giải

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài ta cần tìm giá trị của m thỏa mãn hệ thống điều kiện :

$$\begin{cases} m - 4 \neq 0 \\ P = \dfrac{m-1}{m-4} < 0 \\ S = \dfrac{2(m-2)}{m-4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 \neq 0 \\ (m-1)(m-4) < 0 \\ (m-2)(m-4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 4 \\ 2 < m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2 < m < 4.$$

101 Giải hệ phương trình : (I) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0 & (1) \\ x + y + 8 = 0 & (2) \end{cases}$

Giải

Từ (2) rút ra $y = -(x + 8)$. Thế vào (1) ta được :

$$\begin{cases} x^2 + (x+8)^2 + 6x - 2(x+8) = 0 \\ y = -(x+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 20x + 48 = 0 & (3) \\ y = -(x+8) & (4) \end{cases}$$

Phương trình (3) có các nghiệm $x_{1,2} = -5 \pm 1$. Thay các nghiệm của (3) vào (4) ta được các nghiệm của hệ (I) là :

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases}$$

102 Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình :

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x + 5y = 13 & (1) \\ x^2 + 3y^2 = m & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ (1) rút ra : $x = \dfrac{13 - 5y}{3}$ (3). Thế vào (2) thì được :

$$\left(\frac{13 - 5y}{3}\right)^2 + 3y^2 = m \quad \Leftrightarrow \quad 52y^2 - 130y + 169 - 9m = 0 \qquad (4)$$

Biệt thức của (4) : $\Delta = 65^2 - 52(169 - 9m) = 468m - 4563$

- Nếu $m < \dfrac{4563}{468} = \dfrac{39}{4}$ thì $\Delta < 0$, phương trình (4) vô nghiệm

  Do đó hệ (I) vô nghiệm.

- Nếu $m = \dfrac{39}{4}$ thì $\Delta = 0$, phương trình (4) có nghiệm kép $y_1 = y_2 = \dfrac{5}{4}$

Thế vào (3) ta được $x = \frac{9}{4}$. Hệ (I) có một nghiệm : $\left(\frac{9}{4}; \frac{4}{5}\right)$

- Nếu $m > \frac{39}{4}$ thì $\Delta > 0$, phương trình (4) có hai nghiệm

$$y_1 = \frac{65 - \sqrt{\Delta}}{52} \text{ và } y_2 = \frac{65 + \sqrt{\Delta}}{52}$$

Suy ra hệ (I) có hai nghiệm : $\left(\frac{13 - 5y_1}{3}; y_1\right)$ và $\left(\frac{13 - 5y_2}{3}; y_2\right)$.

Ghi chú : Ta cũng có thể từ (1) rút ra $y = \frac{13 - 2x}{5}$ (3')

rồi thế vào (2) thì được : $52x^2 - 234x + 507 - 25m = 0$ (4')

Biện luận theo m phương trình (4') ta cũng được kết quả như trên.

103 Cho hệ phương trình tham số m : (I) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(m+1) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases}$

Xác định giá trị của m để hệ (I) có đúng 2 nghiệm.

Giải

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 2(m+1) \\ x + y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 2(m+1) \\ x + y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{(A)} \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 - m \end{cases} \text{ hoặc (B)} \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 1 - m \end{cases}$$

Vì $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy \geq 0$ nên để các hệ phương trình (A) và (B) có nghiệm thì điều kiện là :

$$4 - 4(1 - m) = 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$$

Hệ (A) có các nghiệm là các cặp nghiệm của phương trình :

$$X^2 - 2X + 1 - m = 0 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $x = 1 + \sqrt{m}$, $y = 1 - \sqrt{m}$

hoặc $x = 1 - \sqrt{m}$, $y = 1 + \sqrt{m}$

Hệ (B) có các nghiệm là các cặp nghiệm của phương trình :

$$X^2 + 2X + 1 - m = 0 \quad (2)$$

Từ (2) ta có : $x = -1 - \sqrt{m}$, $y = -1 + \sqrt{m}$

hoặc $x = -1 + \sqrt{m}$, $y = -1 - \sqrt{m}$.

Nếu $m > 0$ thì mỗi hệ (A) và (B) đều có 2 nghiệm nên hệ (I) có 4 nghiệm. Để hệ (I) có đúng 2 nghiệm thì mỗi hệ (A) và (B) chỉ có đúng một nghiệm. Điều này chỉ xảy ra khi $m = 0$. Khi đó hệ (I) có đúng 2 nghiệm là $(1; 1)$ và $(-1; -1)$.

104 Giải hệ phương trình : $(I)\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y & (1) \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x & (2) \end{cases}$

Giải

Trừ vế với vế (1) và (2) ta được

$$3x^2 - 3y^2 = x - y \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)(3x + 3y - 1) = 0$$

$$(I) \Leftrightarrow (A)\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - 2y^2 = 2x + y \end{cases} \text{ hoặc } (B)\begin{cases} 3(x + y) = 1 \\ x^2 - 2y^2 = 2x + y \end{cases}$$

Giải hệ (A) ta được : $x = 0, y = 0$ và $x = -3, y = -3$

Hệ (B) vô nghiệm. Vậy hệ (I) có 2 nghiệm $(0; 0)$ và $(-3; -3)$.

Ghi chú : Hệ (I) có thể đưa về dạng : $(I)\begin{cases} f(x; y) = 0 & (1) \\ f(y; x) = 0 & (2) \end{cases}$

Nghĩa là đổi x thành y, y thành x thì (1) trở thành (2) và ngược lại.

Để giải một hệ như vậy ta thay hệ (I) bằng giải hệ :

$$\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ f(x; y) + f(y; x) = 0 \end{cases} \text{ hoặc hệ } \begin{cases} f(x; y) = 0 \\ f(x; y) - f(y; x) = 0 \end{cases}$$

105 Cho hệ phương trình phụ thuộc tham số m :

$$(I)\begin{cases} xy + x^2 = m(y - 1) & (1) \\ xy + y^2 = m(x - 1) & (2) \end{cases}$$

Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải

Nếu hệ có nghiệm $(x; y)$ thì $(y; x)$ cũng là nghiệm. Vì vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì phải có $x = y$.

Khi đó ta có phương trình : $2x^2 - mx + m = 0$, và phương trình phải có nghiệm kép :

$$\Delta = m^2 - 8m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0 \text{ hoặc } m = 8$$

$m = 0$ thì hệ (I) có dạng : $\begin{cases} x(y + x) = 0 \\ y(x + y) = 0 \end{cases}$

Hệ này có vô số nghiệm. Vậy $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu.

m = 8 được hệ $\begin{cases} xy + x^2 = 8(y-1) \\ xy + y^2 = 8(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 8(y-1) \\ x^2 - y^2 = 8(y-x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + x^2 = 8(y-1) \\ (x-y)(x+y+8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ (A) $\begin{cases} x = y \\ xy + x^2 = 8(y-1) \end{cases}$

hoặc (B) $\begin{cases} x + y + 8 = 0 \\ xy + x^2 = 8(y-1) \end{cases}$

Hệ (B) vô nghiệm. Hệ (A) có nghiệm duy nhất (2; 2). Vậy m = 8 là giá trị phải tìm.

Chương 4

BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

KIẾN THỨC CƠ BẢN

+ ***Bất đẳng thức*** *là một mệnh đề có dạng* $A > B$ *hoặc* $A < B$ *hoặc* $A \geq B$ *hoặc* $A \leq B$*. Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức :*

Tính chất 1. $\begin{cases} A > B \\ B > C \end{cases} \Rightarrow A > C$

Tính chất 2. $A > B \Rightarrow A + C > B + C$

Tính chất 3. $\begin{cases} A > B \\ C > 0 \end{cases} \Rightarrow AC > BC$

$\begin{cases} A > B \\ C < 0 \end{cases} \Rightarrow AC < BC$

Tính chất 4. $\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow A + C > B + D$

Tính chất 5. $\begin{cases} A > B > 0 \\ C > D > 0 \end{cases} \Rightarrow AC > BD$

Hệ quả 1 : $A > B > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{A} < \dfrac{1}{B}$

Hệ quả 2 : $\begin{cases} A > B > 0 \\ n \in N^* \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A^n > B^n \\ \sqrt[n]{A} > \sqrt[n]{B} \end{matrix}$

+ ***Bất đẳng thức Côsi***

Với $a \geq 0,\ b \geq 0$ *:* $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

- *Nếu* $a + b$ = *hằng số. Tích* ab *lớn nhất khi* $a = b$.
- *Nếu* $a.b$ = *hằng số. Tổng* $a + b$ *nhỏ nhất khi* $a = b$.

+ ***Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối***

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in R$$

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in R$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$.

+ ***Sơ đồ chứng minh một bất đẳng thức***

Muốn chứng minh : $A > B$, ta có thể theo các sơ đồ :

- $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$
- $E > F$ *(đã biết đúng)* $\Leftrightarrow G > H \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A > B$
- $A > B \Leftrightarrow G > H \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow E > F$ *(đã biết đúng)*

Cũng có thể chứng minh bằng phương pháp phản chứng hay phương pháp quy nạp.

BÀI TẬP

Sử dụng sơ đồ : $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$ để chứng minh $A > B$

106 Cho a, b là các số thực bất kì. Chứng minh :

a) $a^2 - ab + b^2 \geq ab$ (1) **b)** $a^2 + b^2 + 1 \geq a + b + ab$ (2)

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$. Đúng

b) $$(1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{a^2 + b^2}{2} - ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{(a - b)^2}{2} \geq 0.$$ Đúng

107 Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh :

a) $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$ (1)

b) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$ (2)

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow (a^2 - 2abc + b^2c^2) + (b^2 - 2abc + a^2c^2) + (c^2 - 2abc + a^2b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - bc)^2 + (b - ac)^2 + (c - ab)^2 \geq 0$ Đúng.

b) $(2) \Leftrightarrow (a^4 + b^4 - 2a^2b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (a^2 - 2ac + c^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (a - 1)^2 + (a - c)^2 \geq 0$ Đúng.

108 Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh :

a) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$ (1)

b) $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$ (2)

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow\quad (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow\quad (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$ Đúng.

b) (2) $\Leftrightarrow\quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2bc - b^2ac - c^2ab$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}[(a^2b^2 - 2ab.bc + b^2c^2) + (b^2c^2 - 2bc.ca + a^2c^2) + $$
$$+ (a^2c^2 - 2ac.ab + a^2b^2)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}[(ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ab - ac)^2] \geq 0 \text{ Đúng.}$$

109 Cho các số thực $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Chứng minh :

a) $a^2 - b^2 + c^2 \geq (a - b + c)^2$ (1)

b) $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \geq (a - b + c - d)^2$ (2)

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow\quad a^2 - b^2 + c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

$\Leftrightarrow\quad 2ab + 2bc - 2ac - 2b^2 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2(a - b)(b - c) \geq 0$

Đúng, do giả thiết $a \geq b \geq c$.

b) Sử dụng kết quả câu a) :

(1) $\Leftrightarrow\quad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \geq (a - b + c)^2 - d^2 = (a - b + c + d)(a - b + c - d)$

Do $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ nên :

$(a - b + c + d)(a - b + c - d) \geq (a - b + c - d)^2 \quad\Rightarrow$ đpcm.

110 Chứng minh :

a) Với $a > 0$, $b > 0$ thì : $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (1)

b) Với $a, b, c \in (0; 1)$ thì : $a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) < 1$ (2)

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow\quad a\sqrt{a} + b\sqrt{a} \geq \sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad\Leftrightarrow\quad (a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$

Đúng, vì $a > 0$, $b > 0$ thì $a - b$ và $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ có cùng dấu.

b) Ta có $a, b, c \in (0; 1)$ nên :

$(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad 1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc > 0$

$\Leftrightarrow\quad a + b + c - ab - bc - ca < 1 - abc < 1$

$\Rightarrow\quad a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) < 1.$

111 Chứng minh rằng : Nếu $0 < a < b$ thì :

$$a < \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b \qquad (1)$$

Giải

Ta có : $0 < a < b \quad \Rightarrow \quad 0 < a + b < 2b$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2b} < \frac{1}{a+b} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2ab}{2b} < \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \qquad (2)$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad a + b > 2\sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a+b} < \frac{1}{2\sqrt{ab}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2ab}{a+b} < \frac{2ab}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} \qquad (3)$$

Ta lại có : $a + b > 2\sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \frac{2b}{2} = b \qquad (4)$

Từ (2), (3), (4) suy ra (1).

112 Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh, nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \qquad (1)$

Giải

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad ad < bc \quad \Rightarrow \quad ad + ab < bc + ab$$

$$\Rightarrow \quad a(b + d) < b(c + a) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \qquad (2)$$

$$ad < bc \quad \Rightarrow \quad ad + cd < bc + cd$$

$$\Rightarrow \quad (a + c)d < (b + d)c \quad \Rightarrow \quad \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra (1).

Hệ quả : Cho $a, b, c > 0$ thì $\frac{a}{b} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

$$\frac{a}{b} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$$

Ta chỉ việc thay : $1 = \frac{c}{c}$ và áp dụng kết quả trên.

113 Cho a, b > 0. Chứng minh :

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ (1) Dấu = chỉ xảy ra khi a = b.

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (2) Dấu = chỉ xảy ra khi a = b.

Giải

a) Ta có : $(a-b)^2\ge 0\Rightarrow a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2\Rightarrow(1)$

b) $(a-b)^2+4ab\ge 4ab\Rightarrow(a+b)^2\ge 4ab\Rightarrow\frac{(a+b)^2}{(a+b)ab}\ge\frac{4ab}{(a+b)ab}\Rightarrow(2)$

Ghi chú : Bất đẳng thức (2) còn viết dưới dạng : $\frac{a+b}{ab}\ge\frac{4}{a+b}$.

114 Chứng minh : $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ (1)

với mọi a, b, c, d ∈ R.

Giải

$$(1)\Leftrightarrow\quad(a+c)^2+(b+d)^2\le a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$\Leftrightarrow\quad ac+bd\le\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$\Leftrightarrow\quad(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)\quad\Leftrightarrow\quad 2ac.bd\le a^2d^2+b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 0\le(ad-bc)^2\quad\text{Đpcm.}$$

Ý nghĩa hình học của bất đẳng thức

Trong mặt phẳng tọa độ : $\vec{u}=(a;b)$, $\vec{v}=(c;d)$.

Bất đẳng thức trên có nghĩa là : $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$.

115 Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn : a ≥ b ≥ c > 0.

Chứng minh : $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ (1)

Giải

Nhân hai vế (1) với abc > 0 ta được :

$$(1)\Leftrightarrow\quad b^2c+c^2a+a^2b\ge a^2c+b^2a+c^2b$$

$$\Leftrightarrow\quad b^2(c-a)+c^2(a-b)+a^2(b-c)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2(c - b + b - a) + c^2(a - b) + a^2(b - c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (b - c)(a^2 - b^2) + (a - b)(c^2 - b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b)(b - c)[(a + b) - (c + b)] = (a - b)(b - c)(a - c) \geq 0.$$

116 Cho các số thực a, b, c, d. Chứng minh :

a) Nếu $a \geq b$ và $c \geq d$ hoặc $a \leq b$ và $c \leq d$ thì :

$$\frac{ac + bd}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)\left(\frac{c + d}{2}\right) \qquad (1)$$

b) Nếu $a \geq b$ và $c \leq d$ hoặc $a \leq b$ và $c \geq d$ thì :

$$\frac{ac + bd}{2} \leq \left(\frac{a + b}{2}\right)\left(\frac{c + d}{2}\right) \qquad (2)$$

Các bất đẳng thức trên, gọi là *bất đẳng thức Trê-bư-sép.*

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{ac + bd}{2} - \left(\dfrac{a + b}{2}\right)\left(\dfrac{c + d}{2}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(a - b)(c - d)}{4} \geq 0$ đúng.

b) Tương tự câu a).

117 Cho các số thực $a \neq 0$, $b \neq 0$. Chứng minh : $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} \geq \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ (1)

Giải

Nếu a, b khác dấu, vế trái dương, vế phải âm thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp a, b cùng dấu, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a - b)^2(a^2 + b^2 + ab)}{a^2b^2} \geq 0 \quad \text{Đúng.}$$

118 Cho a, b, c là 3 số thực bất kì.

Chứng minh : **a)** $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (1)

b) $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\dfrac{a + b + c}{3}\right)^2$ (2)

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow \quad 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (a^2 + c^2 - 2ac) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$

Mỗi hạng tử vế trái đều không âm nên vế trái không âm.

Bất đẳng thức đúng.

b) (2) $\Leftrightarrow \quad 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 0$

Đúng theo kết quả (1).

119 Chứng minh : $a^2 + b^2 + c^2 + 1 > a + b + c \quad \forall a, b, c \in R.$

Giải

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - a + \frac{1}{4} + b^2 - b + \frac{1}{4} + c^2 - c + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$$

120 **Bất đẳng thức Côsi – Svac**

a) Cho a, b, c, d là các số thực. Chứng minh :

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \tag{1}$$

Dấu "=" chỉ xảy ra khi $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ hay $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$

b) Cho $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ là các số thực. Chứng minh :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \tag{2}$$

Dấu "=" chỉ xảy ra khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ hay $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{b_3}{a_3}$

(Quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử bằng 0).

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow \quad a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (ad - bc)^2 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi $\quad ad - bc = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ hay $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$

b) (2) $\Leftrightarrow \quad (a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2) + (a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1b_1a_3b_3) +$

$$+ (a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2b_2a_3b_3) \geq 0$$

$\Leftrightarrow \quad (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 \geq 0$

Dấu "=" chỉ xảy ra khi tất cả các hạng tử ở vế trái bằng 0

Từ đó suy ra : $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ hay $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$.

121 Cho a, b > 0. Chứng minh : **a)** $(a^3 + b^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \ge (a + b)^2$ (1)

b) $\frac{a + b}{2} \le \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}}$ (2)

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2).\left(\frac{a + b}{ab}\right) - (a + b)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{(a + b)^2(a - b)^2}{ab} \ge 0$ Đúng.

b) $(2) \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{2} - \frac{(a + b)^3}{8} \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{(a + b)}{8}[4(a^2 - ab + b^2) - (a + b)^2] \ge 0$

$\Leftrightarrow 3(a + b)(a - b)^2 \ge 0$ Đúng.

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

122 Cho các số thực a, b, c với a > c > 0, b > c > 0

Chứng minh : $\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \le \sqrt{ab}$ (1)

Giải

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{c(a - c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b - c)}{ab}} \le 1$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho mỗi hạng tử ở vế trái ta được :

$$\sqrt{\frac{c(a - c)}{ab}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} + \frac{a - c}{a}\right)$$

$$\sqrt{\frac{c(b - c)}{ab}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a} + \frac{b - c}{b}\right)$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Ghi chú : Ta cũng có thể chứng minh (1) bằng biến đổi tương đương :

$$(1) \Leftrightarrow \quad c(a-c) + c(b-c) + 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \le ab$$

$$\Leftrightarrow \quad 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \le (ab + 2c^2 - ac - bc)$$

$$\Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow \quad -4bc^2 \le (ab - bc)^2 + c^2a^2 + 2abc^2.$$

Để chứng minh (1) ta cũng có thể áp dụng bất đẳng thức Côsi – Svac (bài 9)

$$xz + yt \le \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{z^2 + t^2}$$

Đặt $x = \sqrt{c}$, $y = \sqrt{b-c}$, $z = \sqrt{a-c}$, $t = \sqrt{c}$ ta được :

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = \sqrt{c}.\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c}\sqrt{c}$$

$$\le \sqrt{(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{b-c})^2}.\sqrt{(\sqrt{a-c})^2 + (\sqrt{c})^2} = \sqrt{ab}$$

123 Cho 4 số không âm a, b, c, d. Chứng minh :

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \le \sqrt{(a+c)(b+d)} \qquad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+d)}} + \sqrt{\frac{cd}{(a+c)(b+d)}} \le 1$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+d)}} \le \frac{1}{2}\left[\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+d}\right]$$

$$\sqrt{\frac{cd}{(a+c)(b+d)}} \le \frac{1}{2}\left[\frac{c}{a+c} + \frac{d}{b+d}\right]$$

Từ đó suy ra (1).

124 Chứng minh rằng với mọi x, y, z > 0 ta có :

a) $x^2 + xy + y^2 \ge \frac{3}{4}(x+y)^2 \qquad (1)$

b) $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \ge \sqrt{3}(x + y + z) \qquad (2)$

Giải

a) Ta có : $3(x+y)^2 + (x-y)^2 \ge 3(x+y)^2$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x^2 + xy + y^2) \ge 3(x+y)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (1)$$

b) Áp dụng kết quả (1) ta có :

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2} \ge$$

$$\ge \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)+\frac{\sqrt{3}}{2}(y+z)+\frac{\sqrt{3}}{2}(z+x) \quad \Rightarrow \quad (2).$$

125 Tam giác ABC có các cạnh a, b, c, chu vi 2p = a + b + c. Chứng minh :

a) $\sqrt{p} < \sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}$ (1)

b) $\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c} \ge 2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ (2)

Giải

a) $$(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})^2 = (p-a)+(p-b)+(p-c)+2\sqrt{p-a}\sqrt{p-b}+$$

$$+2\sqrt{p-b}\sqrt{p-c}+2\sqrt{p-a}\sqrt{p-c}$$

$$\Rightarrow \quad p+(p-a)+(p-b)+(p-b)+(p-c)+(p-a)+(p-c)=3p$$

$$\Leftrightarrow \quad p<(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})^2 \le 3p \quad \Rightarrow \quad (1)$$

Ghi chú : Ta cũng có thể áp dụng bất đẳng thức Côsi – Svac :

$$(1.\sqrt{p-a}+1.\sqrt{p-b}+1.\sqrt{p-c})^2 \le$$

$$\le (1^2+1^2+1^2)[(\sqrt{p-a})^2+(\sqrt{p-b})^2+(\sqrt{p-c})^2].$$

b) Áp dụng bất đẳng thức : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \ge \dfrac{4}{x+y}$ với x, y > 0

ta được : $\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b} \ge \dfrac{4}{p-a+p-b}=\dfrac{4}{c}$

Tương tự ta được : $\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c} \ge \dfrac{4}{a}$

$$\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a} \ge \frac{4}{b}$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right) \ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad (2).$$

126 Cho a, b, c > 0. Chứng minh : **a)** $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \ge 4$ (1)

b) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \ge 9$ (2)

Giải

a) Theo bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm ta có :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}\ ,\quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}$$

$$\Rightarrow \quad (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4\sqrt{ab}.\sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}} = 4$$

b) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số không âm ta có :

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc};\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}$$

$$\Rightarrow \quad (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9\sqrt[3]{abc.\frac{1}{abc}} = 9$$

Tổng quát với n số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

127 Cho a, b, c là 3 số dương. Chứng minh :

a) $\dfrac{a+b}{c} + \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} \geq 6 \quad (1)$; **b)** $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2} \quad (2)$

Giải

a) $VT = \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}.\frac{c}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{c}.\frac{c}{b}} + 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 6$

b) *CÁCH THỨ NHẤT :*

$$(2) \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq 3 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a + b + c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}[(b + c) + (c + a) + (a + b)]\left[\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right] \geq \frac{9}{2}$$

Đúng theo kết quả bài 126b.

CÁCH THỨ HAI :

Đặt $a + b = x$, $b + c = y$, $c + a = z$ thì $a + b + c = \frac{1}{2}(x + y + z)$

$$a = \frac{x + z - y}{2},\ b = \frac{x + y - z}{2},\ c = \frac{y + z - x}{2}$$

Khi đó : (2) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{x+z-y}{2y}+\dfrac{x+y-z}{2z}+\dfrac{y+z-x}{2x} \ge \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x+z}{y}+\dfrac{x+y}{z}+\dfrac{y+z}{x} \ge 6$. Đúng theo kết quả bài 127a

128 Chứng minh : **a)** $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c} \ge a+b+c \quad \forall a, b, c > 0$ (1)

b) $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}} \quad \forall a, b, c \ge 0$ (2)

Giải

a) Ta có : $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b} \ge 2\sqrt{\dfrac{bc}{a}.\dfrac{ca}{b}} = 2c$

$\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c} \ge 2\sqrt{\dfrac{ca}{b}.\dfrac{ab}{c}} = 2a$

$\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a} \ge 2\sqrt{\dfrac{ab}{c}.\dfrac{bc}{a}} = 2b$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta suy ra (1).

b) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

Vì $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ (xem bài 118) nên

$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2 \ge \dfrac{ab+bc+ca}{3}$

$\Leftrightarrow$ (2).

129 Chứng minh : **a)** $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} \le ab \quad \forall a, b \ge 1$ (1)

b) $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{a+c}+\dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b+c}{2} \quad \forall a, b, c > 0$ (2)

Giải

a) $\sqrt{b-1} = \sqrt{1.(b-1)} \le \dfrac{1+b-1}{2} = \dfrac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad a\sqrt{b-1} \le \dfrac{ab}{2}$

Tương tự ta có : $b\sqrt{a-1} \le \dfrac{ab}{2}$. Từ đó suy ra (1).

b) Theo bất đẳng thức Côsi ta có : $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b+c}{4} \ge 2\sqrt{\dfrac{a^2}{b+c}.\dfrac{b+c}{4}} = a$

Tương tự : $\dfrac{b^2}{a+c}+\dfrac{a+c}{4} \ge b, \quad \dfrac{c^2}{a+b}+\dfrac{a+b}{4} \ge c$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{b+c}{4}+\frac{a+c}{4}+\frac{a+b}{4} \geq a+b+c \quad \Rightarrow \qquad (2)$$

130 Chứng minh : **a)** $-\frac{1}{2} \leq \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq \frac{1}{2}$ (1)

b) $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{a+b+c}{2abc}$ $\forall a, b, c > 0$ (2)

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $(a+b)^2$ và $(1-ab)^2$ ta được :

$$\sqrt{(a+b)^2(1-ab)^2} \leq \frac{(a+b)^2+(1-ab)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |(a+b)(1-ab)| \leq \frac{a^2+b^2+1+a^2b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad |(a+b)(1-ab)| \leq \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad (2)$$

b) Ta có : $a^2+bc \geq 2\sqrt{a^2bc} = \frac{2abc}{\sqrt{bc}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^2+bc} \leq \frac{\sqrt{bc}}{2abc} \leq \frac{b+c}{4abc}$

Tương tự ta có : $\frac{1}{b^2+ca} \leq \frac{c+a}{4abc}$; $\quad \frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{a+b}{4abc}$

Từ đó suy ra (2).

131 Chứng minh : **a)** $a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$ $\forall a > b > 0$ (1)

b) $a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3$ $\forall a > b > 0$ (2)

Giải

a) $a + \frac{1}{b(a-b)} = b + (a-b) + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b(a-b)}{b(a-b)}} = 3$

b) $a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} = (a-b) + \frac{b+1}{2} + \frac{b+1}{2} + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} - 1$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{(a-b)\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 .4}{(a-b)(b+1)^2}} - 1 = 3.$$

132 Cho a, b $\in$ R với b > 0. Chứng minh : $\dfrac{a^6 + b^9}{4} \geq 3a^2b^3 - 16$.

Giải

Ta có : $\dfrac{b^9}{4} + \dfrac{a^6}{4} + 16 \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{a^6}{4}.\dfrac{b^9}{4}.16} \Leftrightarrow \dfrac{a^6 + b^9}{4} \geq 3a^2b^3 - 16$ Đpcm.

BẤT ĐẲNG THỨC CÓ DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

133 Chứng minh :

a) $|a| - |b| \leq |a + b|$ với mọi a, b $\in$ R (1)

b) $|a - b| + |b - c| \geq |a - c|$ với mọi a, b, c $\in$ R (2)

Giải

a) Ta có : $|a| = |a + b - b| = |(a + b) + (-b)|$

$\leq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|$

$\Rightarrow \quad |a| - |b| \leq |a + b|$

b) $|a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|$.

134 Chứng minh với mọi a, b $\in$ R : $\dfrac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|} \geq \dfrac{|a + b|}{1 + |a + b|}$.

Giải

Ta có, với mọi a, b, $\in$ R : $|a| + |b| \geq |a + b|$

$\Rightarrow \quad |a + b|(|a| + |b|) + |a| + |b| \geq |a + b| + |a + b|(|a| + |b|)$

$\Rightarrow \quad (|a| + |b|)(1 + |a + b|) \geq |a + b|(1 + |a| + |b|)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|} \geq \dfrac{|a + b|}{1 + |a + b|}$.

135 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$f(x) = |x - 2005| + |x - 2007|.$$

Giải

Ta có : $|x - 2005| = \begin{cases} -x + 2005 & \text{nếu } x < 2005 \\ x - 2005 & \text{nếu } 2005 \leq x \end{cases}$

$|x - 2007| = \begin{cases} -x + 2007 & \text{nếu } x < 2007 \\ x - 2007 & \text{nếu } 2007 \leq x \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} -2x + 4012 & \text{nếu } x < 2005 \\ 2 & \text{nếu } 2005 \le x \le 2007 \\ 2x - 4012 & \text{nếu } x > 2007 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của f(x) bằng 2.

TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

136 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

a) $f(x) = (1 + x)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ với $x > 0$

b) $h(x) = (x + 1)^2 + \left(\frac{x^2}{x + 1} + 2\right)^2$ với $x \neq -1$.

Giải

a) Ta có : $f(x) = 2 + x + \frac{1}{x}$

Theo bất đẳng thức Côsi, với $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \ge 2\sqrt{x.\frac{1}{x}} = 2$.

Dấu "=" chỉ xảy ra khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy $f(x) \ge 4$ và đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 khi $x = 1$.

b) $h(x) = (x + 1)^2 + \left(x + 1 + \frac{1}{x + 1}\right)^2 = 2(x + 1)^2 + \frac{1}{(x + 1)^2} + 2$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$2(x + 1)^2 + \frac{1}{(x + 1)^2} \ge 2\sqrt{2(x + 1)^2\frac{1}{(x + 1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \quad h(x) \ge 2\sqrt{2} + 2$

Biểu thức h(x) đạt giá trị nhỏ nhất min [h(x)] = $2(1 + \sqrt{2})$ khi

$$2(x + 1)^2 = \frac{1}{(x + 1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

137 Cho $x > 0$, $y > 0$ và $xy = 4$. Tìm giá trị nho nhất của :

a) $P(x; y) = x^2 + y^2$. **b)** $Q(x; y) = (x + 1)(4y + 3)$.

Giải

a) $P(x; y) = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (x + y)^2 - 8$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Côsi. Tích $xy = 4$ là hằng số nên tổng $x + y$ nhỏ nhất khi $x = y = 2$.

Vậy : $\min P(x; y) = 4^2 - 8 = 8$ đạt được khi $x = y = 2$.

b) $Q(x; y) = 4xy + 3 + 3x + 4y = 19 + 3x + 4y \geq 19 + 2\sqrt{3x.4y} = 19 + 8\sqrt{3}$

$\text{Min } Q(x; y) = 19 + 8\sqrt{3}$ đạt được khi $3x = 4y$, $xy = 4$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{4\sqrt{3}}{3},\ y = \sqrt{3}.$$

138 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

a) $P(x; y) = x^2y^2 + x^2 - 2xy - 4x + 2$ với $x, y \in R$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$ với $x > 0$.

Giải

a) $P(x; y) = x^2y^2 - 2xy + 1 + x^2 - 4x + 4 - 3 = (xy - 1)^2 + (x - 2)^2 - 3 \geq -3$

$\text{Min } P(x; y) = -3$ đạt được khi $xy - 1 = 0$, $x = 2$, tức $x = 2$, $y = \dfrac{1}{2}$.

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}.\dfrac{x}{2}.\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

$\text{Min } f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ đạt được khi $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{x^2}$, tức khi $x = \sqrt[3]{2}$.

139 Tìm giá trị lớn nhất của : $f(x) = \sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x}$ với $x \in [-3; 6]$.

Giải

CÁCH 1 : Ta có : $f(x) \geq 0\ \forall x \in [-3; 6]$ nên $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $[f(x)]^2$ đạt giá trị lớn nhất.

$$[f(x)]^2 = (3 + x) + (6 - x) + 2\sqrt{(3 + x)(6 - x)} = 9 + 2\sqrt{(3 + x)(6 - x)}$$

Với $x \in [-3; 6]$, $(3 + x) \geq 0$, $(6 - x) \geq 0$ có tổng bằng 9

nên tích $(3 + x)(6 - x)$ lớn nhất khi $3 + x = 6 - x \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$\text{Max } f(x) = \sqrt{\text{Max}[f(x)]^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ đạt được khi $x = \dfrac{3}{2}$.

CÁCH 2 : Áp dụng bất đẳng thức Côsi Svac :

$$f(x) = 1.\sqrt{3+x} + 1.\sqrt{6-x} \le \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{(\sqrt{3+x})^2 + (\sqrt{6-x})^2} = 3\sqrt{2}$$

f(x) đạt giá trị lớn nhất bằng $3\sqrt{2}$ khi :

$$\frac{\sqrt{3+x}}{1} = \frac{\sqrt{6-x}}{1} \Leftrightarrow 3 + x = 6 - x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

140 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

a) $f(x) = (2x-1)(3-5x)$

b) $P(x;y) = \dfrac{x\sqrt{y-2} + y\sqrt{x-3}}{xy}$ với $x \ge 3$, $y \ge 2$

Giải

a) $f(x) = \dfrac{2}{5}\left(5x - \dfrac{5}{2}\right)(3-5x)$

Theo bất đẳng thức $ab \le \dfrac{1}{4}(a+b)^2$ $\forall a, b \in R$ ta có :

$$f(x) \le \frac{2}{5}.\frac{1}{4}\left[\left(5x - \frac{5}{2}\right) + (3-5x)\right]^2 = \frac{2}{5}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{40}$$

Max $f(x) = \dfrac{1}{40}$ đạt được khi $5x - \dfrac{5}{2} = 3 - 5x \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{20}$.

b) $P(x;y) = \dfrac{\sqrt{y-2}}{y} + \dfrac{\sqrt{x-3}}{x} = \dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{y-2}}{2\sqrt{2}y} + \dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{x-3}}{2\sqrt{3}x}$

Theo bất đẳng thức Côsi : $2\sqrt{2}\sqrt{y-2} \le 2 + y - 2 = y$

$$2\sqrt{3}\sqrt{x-3} \le 3 + (x-3) = x.$$

Do đó : $P(x;y) \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

Max $P(x;y) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ đạt được khi :

$\sqrt{3} = \sqrt{x-3}$ và $\sqrt{2} = \sqrt{y-2}$, tức khi $x = 6$, $y = 4$.

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN, HAI ẨN

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Một mệnh đề chứa một biến có một trong các dạng :

$f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$

là bất phương trình một ẩn x

*Các khái niệm : "**Điều kiện xác định**" của bất phương trình, **nghiệm** của bất phương trình, **bất phương trình hệ quả, bất phương trình tương đương** được định nghĩa tương tự như trong phạm trù phương trình.*

II. GIẢI VÀ BIỆN LUẬN BẤT PHƯƠNG TRÌNH $ax + b > 0$ (1)

+ *Nếu* $a > 0$ *thì (1) có tập nghiệm là :* $x > -\frac{b}{a}$, *tức là* $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$

+ *Nếu* $a < 0$ *thì (1) có tập nghiệm là :* $x < -\frac{b}{a}$, *tức là* $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$

+ *Nếu* $a = 0$, $b > 0$ *tập nghiệm của (1) là R.*

+ *Nếu* $a = 0$, $b \leq 0$ *thì (1) vô nghiệm.*

III. GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Muốn giải hệ bất phương trình một ẩn ta tìm tập hợp số là giao của các tập nghiệm của từng bất phương trình của hệ.

IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Mệnh đề chứa hai biến (x và y) dạng :

$ax + by > c$ *hoặc* $ax + by \geq c$ *hoặc* $ax + by < c$ *hoặc* $ax + by \leq c$

trong đó a, b, c là các số đã biết là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

*Muốn xác định **miền nghiệm** của bất phương trình* $ax + by < c$ *(2)*

ta thực hiện :

B1 – Vẽ đường thẳng $ax + by = c$ *(d)*

B2 – Chọn điểm $M_0(x_0; y_0) \notin d$

B3 – Tính $ax_0 + by_0$.

Nếu $ax_0 + by_0 < c$ *thì nửa mặt phẳng bờ (d) chứa* M_0 *(không kể bờ) là miền nghiệm của (2).*

Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ là (d) không chứa M_0 là miền nghiệm của (2).

Muốn xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn ta vẽ miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ và tìm phần mặt phẳng chung của các miền nghiệm nói trên.

V. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Biểu thức dạng $f(x) = ax + b$; a, b đã cho với $a \neq 0$ là nhị thức bậc nhất.

Định lí : *Nhị thức $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ cùng dấu với hệ số a khi $x > -\frac{b}{a}$, trái dấu với hệ số a khi $x < -\frac{b}{a}$.*

BÀI TẬP

141 Xét sự tương đương của các cặp bất phương trình dưới đây :

a) $3x^3 - 5x^2 + 6x > 4$ và $\frac{5}{3}x^2 - 2x < x^3 - \frac{4}{3}$

b) $4x^2 - 5x + 3 > 0$ và $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + \frac{5}{4} > 0.$

Giải

a) Ta có : $\frac{5}{3}x^2 - 2x < x^3 - \frac{4}{3} \Leftrightarrow 5x^2 - 6x < 3x^3 - 4$

(Do nhân hai vế bất phương trình với 3)

$5x^2 - 6x < 3x^3 - 4 \Leftrightarrow 3x^3 - 5x^2 + 6x > 4$

(Theo quy tắc chuyển vế)

Vậy hai bất phương trình tương đương.

b) $4x^2 - 5x + 3 = \left(2x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{13}{16} > 0 \quad \forall x \in R$

Tập nghiệm của bất phương trình là tập số thực R

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + \frac{5}{4} = [(x - 1)(x - 4)][(x - 2)(x - 3)] + \frac{5}{4}$$

$$= (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + \frac{5}{4} = (x^2 - 5x + 4)^2 + 2(x^2 - 5x + 4) + \frac{5}{4}$$

$$= (x^2 - 5x + 5)^2 + \frac{1}{4} > 0 \quad \forall x \in R.$$

Tập nghiệm của bất phương trình sau cũng là tập số thực R.

Hai bất phương trình tương đương vì có cùng tập nghiệm.

142 Trong mỗi cặp bất phương trình sau đây, bất phương trình nào là hệ quả của bất phương trình kia.

a) $x > 1 - x$ và $x + \frac{1}{2-x} > 1 - x + \frac{1}{2-x}$

b) $|2x + 1| > \sqrt{x}$ và $(2x + 1)^2 > x$.

Giải

a) $x = 2$ là một nghiệm của bất phương trình $x > 1 - x$ nhưng không phải là nghiệm của bất phương trình kia.

Trái lại, mọi $x \neq 2$ là nghiệm của $x + \frac{1}{2-x} > 1 - x + \frac{1}{2-x}$ là nghiệm của bất phương trình $x > 1 - x$

Vậy $x > 1 - x$ là hệ quả của bất phương trình còn lại.

b) Mọi nghiệm của $|2x + 1| > \sqrt{x}$ đều là một nghiệm của bất phương trình kia. Vậy $(2x + 1)^2 > x$ là bất phương trình hệ quả của bất phương trình $|2x + 1| > \sqrt{x}$.

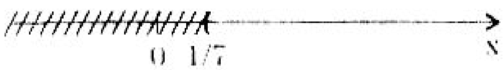
143 Giải bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số

a) $x + 1 + \frac{x-1}{2} > \frac{x+2}{3}$ (1) b) $(x - 2)^2 + x^2 < 2x^2 - 3x - 5$ (2)

Giải

a) Nhân hai vế (1) với 6 ta được : $6(x + 1) + 3(x - 1) > 2(x + 2)$

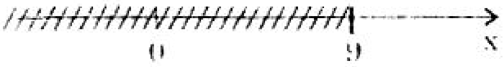
$\Leftrightarrow 9x + 3 > 2x + 4 \Leftrightarrow x > \frac{1}{7}$



Biểu diễn nghiệm trên trục số ở hình bên

b) $(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 4 < 2x^2 - 3x - 5$

$\Leftrightarrow -x < -9 \Leftrightarrow x > 9.$



144 Giải hệ bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số :

$$(I)\begin{cases} 3x - 5 < \frac{x-1}{3} & (1) \\ \frac{2x-1}{3} - \frac{3x-2}{2} < \frac{4x}{5} & (2) \end{cases}$$

Giải

$(1) \Leftrightarrow \quad 3(3x - 5) < x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 8x < 16$

$\Leftrightarrow \quad x < 2$ hay $x \in (-\infty; 2)$

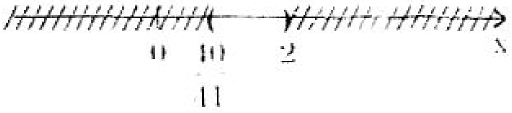
$(2) \Leftrightarrow \quad 10(2x - 1) + 15(3x - 2) > 24x \quad \Leftrightarrow \quad 41x > 40$

$\Leftrightarrow \quad x > \dfrac{40}{41}$ hay $x \in \left(\dfrac{40}{41}; +\infty\right)$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình (I) là :

$$(-\infty; 2) \cap \left(\frac{40}{41}; +\infty\right) = \left(\frac{40}{41}; 2\right)$$

Trên trục số tập nghiệm là tọa độ các điểm trong khoảng không bị gạch sọc.



145 Giải bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số :

$$2(x^2 - 9)(x + 7) > (x^2 - 49)(x + 3) \qquad (1)$$

Giải

$(1) \Leftrightarrow \quad 2(x - 3)(x + 3)(x + 7) > (x - 7)(x + 7)(x + 3)$

$\Leftrightarrow \quad (x + 3)(x + 7)[2(x - 3) - (x - 7)] > 0$

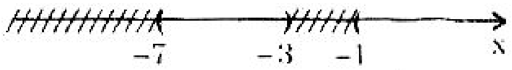
$\Leftrightarrow \quad (x + 3)(x + 7)(x + 1) > 0$

Ta xét dấu các nhị thức ở vế trái cùng một bảng như sau :

x	$-\infty$		-7		-3		-1		$+\infty$
x + 1		−		−		−	0	+	
x + 3		−		−	0	+		+	
x + 7		−	0	+		+		+	
Vế trái		▨	0	+	0	▨	0	+	

Qua bảng xét dấu ta kết luận :

Tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = (-7; -3) \cup (-1; +\infty)$



Biểu diễn tập nghiệm trên trục số ở hình bên.

Ghi chú : Ta có thể dùng *phương pháp khoảng* để giải bất phương trình f(x) > 0 (hay f(x) < 0) trong đó f(x) là tích của các nhị thức bậc nhất có nghiệm khác nhau dựa trên mệnh đề sau : Các nghiệm của f(x) chia trục số thành những khoảng.

Nếu x lấy giá trị thuộc hai khoảng kề nhau thì f(x) lấy dấu trái nhau. Nếu x lấy các giá trị trong một khoảng thì f(x) lấy cùng một dấu.

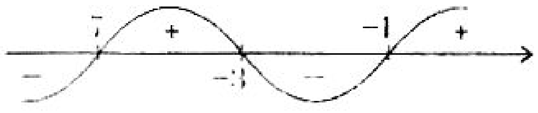
Trong bài toán trên $f(x) = (x + 3)(x + 7)(x + 1)$

Có các nghiệm sắp thứ tự từ nhỏ đến lớn là $-7 < -3 < -1$.

Các nghiệm chia trục số thành các khoảng $(-\infty; -7)$, $(-7; -3)$, $(-3; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Nhận xét : $0 \in (-1; +\infty)$ ta có : $f(0) = 3.7.1 > 0$.

Vậy $f(x) < 0$ nếu $x \in (-3; -1)$ và $f(x) > 0$ nếu $x \in (-7; -3)$, $f(x) < 0$ nếu $x \in (-\infty; -7)$



Như vậy, không cần lập bảng ta được nghiệm của bất phương trình là :

$$S = (-7; -3) \cup (-1; +\infty).$$

146 Dùng phương pháp khoảng giải bất phương trình : $\dfrac{x + 2}{3x + 1} \le \dfrac{x - 2}{2x - 1}$ (1)

Giải

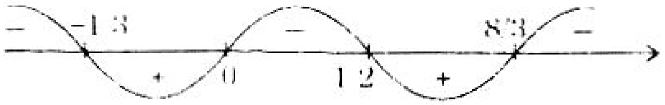
$$D = R \setminus \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x + 2}{3x + 1} - \frac{x - 2}{2x - 1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x(8 - 3x)}{(3x + 1)(2x - 1)} \le 0$$

Dấu của vế trái cùng dấu với : $x(8 - 3x)(3x + 1)(2x - 1) = f(x)$

Vẽ các nghiệm trên trục số ta được hình bên.

Ta có : $f(1) = 1.5.4.1 > 0$



Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là :

$$S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{8}{3}; +\infty\right).$$

147 Giải và biện luận theo tham số m bất phương trình

a) $mx + 2 \ge 3x - m + 1$ (1) **b)** $(2 - m)x + 1 > m^2x - 2$ (2)

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow (m - 3)x \ge -(m + 1)$

- Nếu $m - 3 > 0$, tức $m > 3$ thì (1) có tập nghiệm : $x \ge \dfrac{-m - 1}{m - 3}$.
- Nếu $m - 3 = 0$, tức $m = 3$ thì (1) trở thành $0x \ge -4$. Mọi số thực đều là nghiệm của bất phương trình, tức là tập nghiệm = R.
- Nếu $m - 3 < 0$, tức $m < 3$, tập nghiệm của (1) là $x \le \dfrac{-m - 1}{m - 3}$.

b) (2) ⇔ $(m^2 + m - 2)x < 3 \Leftrightarrow (m + 2)(m - 1)x < 3$ (2')

Ta lập bảng xét dấu của hệ số của x trong (2')

m	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$m - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$m + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(m - 1)(m + 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Theo bảng xét dấu của hệ số của x ta biện luận như sau :

+ Nếu $m < -2$ hoặc $m > 1$ tập nghiệm của (2) là :

$$x < \frac{3}{m^2 + m - 2} \quad \text{hay} \quad S = \left(-\infty; \frac{3}{m^2 + m - 2}\right)$$

+ Nếu $m = -2$ hoặc $m = 1$ thì (2') có dạng $0x < 3$

  Tập nghiệm của bất phương trình là S = R.

+ Nếu $-2 < m < 1$, tập nghiệm là $S = \left(\frac{3}{m^2 + m - 2}; +\infty\right)$.

148 Giải và biện luận bất phương trình : $ax + b^2 > bx + a^2$ (1)

(a, b là tham số).

Giải

(1) ⇔ $(a - b)x > a^2 - b^2$

- Nếu $a > b$ thì (1) có nghiệm là $x > \dfrac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$
- Nếu $a < b$ thì (1) có nghiệm là $x < \dfrac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$
- Nếu $a = b$ bất phương trình có dạng $0x > 0$. Vô nghiệm.

149 Tìm những giá trị của x thỏa mãn điều kiện : $-2 \le \dfrac{2x - 1}{x + 3} \le 3$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \quad (I) \begin{cases} -2 \le \dfrac{2x - 1}{x + 3} & (2) \\ \dfrac{2x - 1}{x + 3} \le 3 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{x + 3} + 2 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{4x + 5}{x + 3} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup \left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)$$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+3} - 3 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x-10}{x+3} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -10] \cup (-3; +\infty)$$

Vậy tập những giá trị của x thoả mãn (1) cũng là tập nghiệm của hệ bất phương trình (I) là :

$$S = \left[(-\infty; -3) \cup \left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)\right] \cap [(-\infty; -10] \cup (-3; +\infty)]$$

$$= (-\infty; -10] \cup \left[-\frac{5}{4}; +\infty\right).$$

150 Giải phương trình và bất phương trình sau :

a) $|2x-3| + |x+4| = 6$ (1) b) $\left|\frac{2-x}{x+1}\right| \ge 2$ (2)

Giải

a) Để giải (1) ta tìm các phương trình không chứa dấu giá trị tuyệt đối tương đương trên từng khoảng xác định.

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$\lvert 2x-3 \rvert$		$-2x+3$		$-2x+3$	0	$2x-3$	
$\lvert x+4 \rvert$		$-x-4$	0	$x+4$		$x+4$	
VT (1)		$-3x-1$		$-x+7$		$3x+1$	

Như vậy tập nghiệm của phương trình (1) là hợp của các tập nghiệm của các phương trình sau :

i) $-3x-1=6$ với điều kiện $x < -4$. Phương trình này vô nghiệm.

ii) $-x+7=6$ với điều kiện $-4 \le x < \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$ (nhận)

iii) $3x+1=6$ với điều kiện $x \ge \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{5}{3}$ (nhận)

Kết luận tập nghiệm của (1) là $S = \left\{1; \frac{5}{3}\right\}$.

b) $$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \frac{2-x}{x+1} \ge 2 \text{ nếu } -1 \le x \le 2 & (3) \\ \frac{x-2}{x+1} \ge 2 \text{ nếu } x < -1 \text{ hoặc } x > 2 & (4) \end{array}\right.$$

Giải các bất phương trình (3) và (4) ta được tập nghiệm là :

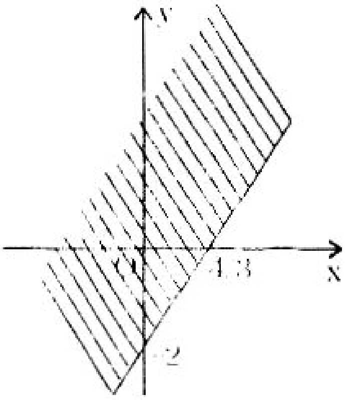
$$S = [-4; -1) \cup (-1; 0].$$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

151 Hãy vẽ miền nghiệm của bất phương trình

a) $3x - 2y > 4$ (1) **b)** $2x + y \leq 3$ (2)

Giải



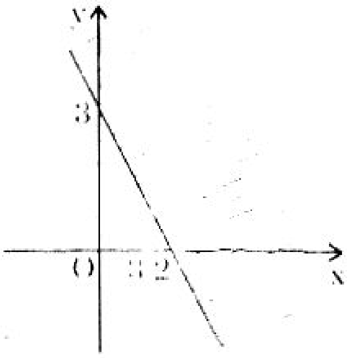
a) (1) ⇔ $y < \frac{3}{2}x - 2$

- Vẽ đường thẳng $3x - 2y = 4$ tức là đồ thị hàm số $y = \frac{3}{2}x - 2$

- Thay tọa độ điểm gốc O(0; 0) vào (1) ta thấy O(0; 0) không nghiệm đúng (1).

Vậy miền nghiệm là nửa mặt phẳng không kể bờ không chứa điểm O(0; 0), bờ là đường thẳng $3x - 2y = 4$ (miền không bị gạch sọc).

b) Làm tương tự câu a)



(2) ⇔ $y \leq -2x + 3$

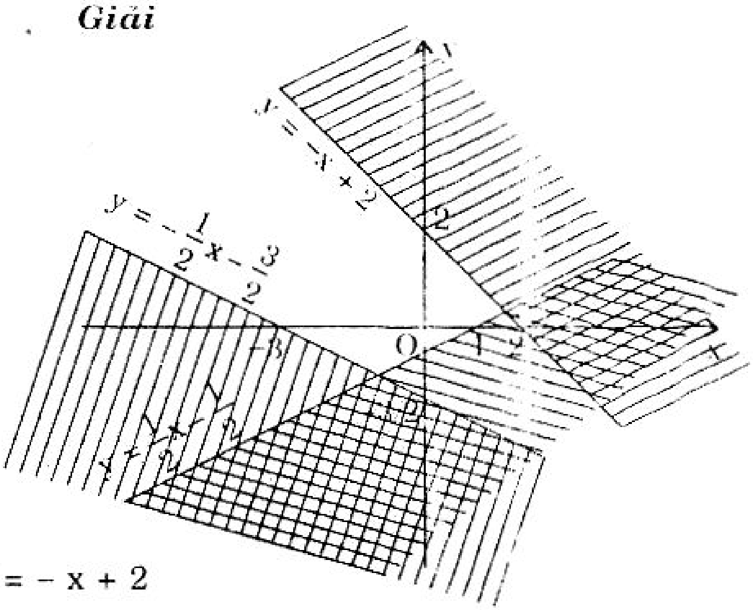
Miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ là đường $y = -2x + 3$ có chứa điểm O(0; 0) (miền không có gạch sọc).

152 Hãy vẽ miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$(I)\begin{cases} x - 2y < 1 & (1) \\ x + 2y > -3 & (2) \\ y + x < 2 & (3) \end{cases}$$

Giải

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y > \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y > -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y < -x + 2 \end{cases}$$



Vẽ các đường thẳng :

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,

$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ và $y = -x + 2$

Xác định các nửa mặt phẳng là miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ. Phần mặt phẳng chung của tất cả các miền nghiệm (phần không bị gạch sọc) của các bất phương trình là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

153 Tìm những số x, y thỏa mãn hệ bất phương trình :

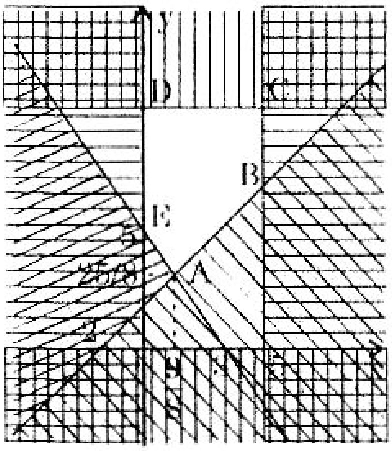
$$(\mathrm{I})\begin{cases} 0 \le x \le 5 & (1)\\ 0 \le y \le 10 & (2)\\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} \ge 1 & (3)\\ \dfrac{-x}{2} + \dfrac{y}{2} \ge 1 & (4) \end{cases}$$

sao cho biểu thức T = 2x − 2y + 3 nhận giá trị nhỏ nhất.

Giải

Miền nghiệm của hệ (I) là đa giác ABCDE kể cả biên.

Giá trị T = 2x − 2y + 3 với (x; y) ∈ ABCDE đạt giá trị nhỏ nhất bằng −1 tại $x = \dfrac{9}{8}$, $y = \dfrac{25}{8}$.



§3. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI
BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. ĐỊNH LÍ VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Định lí : *Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$*

- *Nếu $\Delta < 0$ thì với mọi x, f(x) luôn cùng dấu với hệ số a.*
- *Nếu $\Delta = 0$ thì f(x) có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$ và với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, f(x) luôn cùng dấu với hệ số a.*
- *Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) có hai nghiệm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ và f(x) luôn cùng dấu với hệ số a ngoài đoạn $[x_1; x_2]$ $(x \ge x_1$ hoặc $x \le x_2)$, f(x) trái dấu với a khi x ở trong khoảng $(x_1; x_2)$ tức $x_1 < x < x_2$.*

II. CÁCH GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Dựa vào định lí về dấu của tam thức bậc hai.

III. ĐỊNH LÍ ĐẢO VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Định lí : *Cho tam thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *và một số* α

Nếu $af(\alpha) < 0$ *thì* $f(x)$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ *và* $x_1 < \alpha < x_2$.

IV. SO SÁNH MỘT SỐ VỚI NGHIỆM CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Xét tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *và số thực* α.

- *Nếu* $af(\alpha) < 0$ *thì* $f(x)$ *có hai nghiệm* $x_1 < x_2$ *và* $x_1 < \alpha < x_2$
- *Nếu* $af(\alpha) = 0$ *thì* α *là một nghiệm của* $f(x)$.
- *Nếu* $af(\alpha) > 0$ *và* $\Delta < 0$ *thì* $f(x)$ *vô nghiệm.*
- *Nếu* $af(\alpha) > 0$, $\Delta > 0$, $\dfrac{S}{2} - \alpha > 0$ *thì* $f(x)$ *có 2 nghiệm* x_1, x_2 *và* $x_1 < x_2 < \alpha$.

Hệ quả 1 : *Phương trình* $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ *có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi có số* α *sao cho* $af(\alpha) < 0$.

Hệ quả 2 : *Cho tam thức* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *và hai số* $\alpha < \beta$.

Điều kiện cần và đủ để phương trình $f(x) = 0$ *có 2 nghiệm, một nghiệm nằm trong khoảng* $(\alpha; \beta)$, *nghiệm kia nằm ngoài đoạn* $[\alpha; \beta]$ *là* $f(\alpha).f(\beta) < 0$.

BÀI TẬP

154 Xét dấu của biểu thức :

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ **b)** $g(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x - 1} - \dfrac{2x^2 + x + 15}{x - 3}$.

Giải

a) Biệt thức : $\Delta = 3^2 - 4.2.1 = 1 > 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{\Delta}}{4} = \dfrac{1}{2}$ hoặc $x = x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{\Delta}}{4} = 1$

$f(x) > 0$ khi $x \notin \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$ $\left(x < \dfrac{1}{2}\right.$ hoặc $\left.x > 1\right)$

$f(x) < 0$ khi $\dfrac{1}{2} < x < 1$

b) $g(x) = \dfrac{-10x^2 + 3x + 9}{(x - 1)(x - 3)}$

Điều kiện $x \neq 1$ và $x \neq 3$. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 10x^2 + 3x + 9 = 0$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{41}}{20}$$

Lập bảng xét dấu chung của tử và mẫu thức :

x	$-\infty$		$\frac{3-3\sqrt{41}}{20}$		1		$\frac{3+3\sqrt{41}}{20}$		3		$+\infty$
$-10x^2 + 3x + 9$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x - 3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$			0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Qua bảng xét dấu ta kết luận :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{3 - 3\sqrt{41}}{20} \text{ hoặc } x = x_2 = \frac{3 + 3\sqrt{41}}{20}$$

$$g(x) < 0 \text{ khi } x \in \left(-\infty; \frac{3 - 3\sqrt{41}}{20}\right) \cup \left(1; \frac{3 + 3\sqrt{41}}{20}\right) \cup (3; +\infty)$$

$$g(x) > 0 \text{ khi } x \in \left(\frac{3 - 3\sqrt{41}}{20}; 1\right) \cup \left(\frac{3 + 3\sqrt{41}}{20}; 3\right).$$

155 Giải bất phương trình bậc hai và biểu diễn nghiệm trên trục số :

a) $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$ (1) **b)** $x^2 + 2x + 3 < 0$ (2).

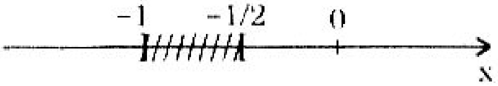
Giải

a) Xét dấu của tam thức vế trái (1)

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = -1 \text{ hoặc } x = x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq -\frac{1}{2}$$

Tức là tập nghiệm $S = (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.



b) Tam thức vế trái của (2) có biệt thức

$$\Delta = 2^2 - 4.3 = -8 < 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bất phương trình (2) vô nghiệm.

156 Giải hệ bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số

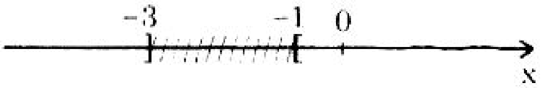
a) (I) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \ge 0 & (1) \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 & (2) \end{cases}$ b) (II) $\begin{cases} 2x^2 + x - 10 > 0 & (1) \\ 4x^2 + x + 1 < 0 & (2) \end{cases}$

Giải

a) $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -3$

Tập nghiệm của (1) của hệ (I) :

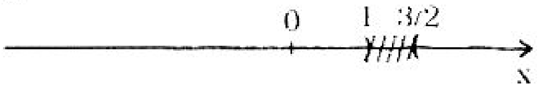
$S_1 = (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$

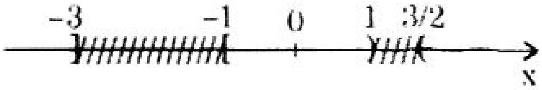


$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \dfrac{3}{2}$

Tập nghiệm của (2) của hệ (I) :

$S_2 = (-\infty; 1) \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$





Tập nghiệm của hệ (I) là :

$$S = S_1 \cap S_2 = [(-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)] \cap \left[(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)\right]$$

$$= (-\infty; -3] \cup [-1; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

b) Biệt thức của vế trái của (2) của hệ II là : $\Delta = 1^2 - 4.4 < 0$

Suy ra $4x^2 + x + 1 > 0\ \forall x \in R$. Do đó bất phương trình (2) của hệ (II) vô nghiệm.

Hệ (II) có một bất phương trình vô nghiệm do đó hệ (II) vô nghiệm (bất kể bất phương trình (1) có nghiệm hay không).

157 Giải và biện luận bất phương trình theo tham số m

$$x^2 + (m - 1)x + 1 > 0 \qquad (1)$$

Giải

Xét $f(x) = x^2 + (m - 1)x + 1$ có biệt thức $\Delta = (m - 1)^2 - 4$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = 3$

- Nếu $-1 < m < 3$ thì $\Delta < 0$, $f(x) > 0\ \forall x \in R$. Tập nghiệm của (1) là $S = R$.
- Nếu $m = -1$ hoặc $m = 3$ thì $\Delta = 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 - m}{2}$

$f(x) > 0\ \forall x \ne \dfrac{1 - m}{2}$. Vậy tập nghiệm của (1) là $D = R \setminus \left\{\dfrac{1 - m}{2}\right\}$.

- Nếu $m < -1$ hoặc $m > 3$ thì $\Delta > 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \quad x = x_1 = \dfrac{1 - m - \sqrt{\Delta}}{2}$ hoặc $x_2 = \dfrac{1 - m + \sqrt{\Delta}}{2}$

$f(x) > 0$ khi $\quad x \notin [x_1; x_2]$

Tập nghiệm của (1) là : $S = \left(-\infty; \dfrac{1 - m - \sqrt{\Delta}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1 - m + \sqrt{\Delta}}{2}; +\infty\right)$.

158 Giải và biện luận bất phương trình theo tham số m

$$mx^2 - (m + 1)x + 2 \geq 0 \qquad (1)$$

Giải

- Nếu $m = 0$ bất phương trình (1) trở thành bất phương trình bậc nhất $-x + 2 \geq 0$. Tập nghiệm $S = (-\infty; 2]$
- Nếu $m \neq 0$, $f(x) = mx^2 - (m + 1)x + 2$ có biệt thức

$$\Delta = (m + 1)^2 - 8m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 3 \pm \sqrt{8}$$

Bảng xét dấu của Δ theo giá trị của m như sau :

m	$-\infty$		$3 - \sqrt{8}$		$3 + \sqrt{8}$		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	

- Nếu $m < 0$ thì $\Delta > 0$.

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1 = \dfrac{m + 1 - \sqrt{\Delta}}{2m}$ hoặc $x = x_2 = \dfrac{m + 1 + \sqrt{\Delta}}{2m}$

Tập nghiệm của (1) là $S = \left[\dfrac{m + 1 - \sqrt{\Delta}}{2m}; \dfrac{m + 1 + \sqrt{\Delta}}{2m}\right]$

- Nếu $0 < m < 3 - \sqrt{8}$ hoặc $m > 3 + \sqrt{8}$ thì $\Delta > 0$ và $f(x) \geq 0$ khi $x \leq x_1$ hoặc $x \geq x_2$

Tập nghiệm của (1) là $S = \left(-\infty; \dfrac{m + 1 - \sqrt{\Delta}}{2m}\right] \cup \left[\dfrac{m + 1 + \sqrt{\Delta}}{2m}; +\infty\right)$

- Nếu $3 - \sqrt{8} \leq m \leq 3 + \sqrt{8}$ thì : $\Delta \leq 0$, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in R$

Tập nghiệm của (1) là $S = R$.

159 Với những giá trị nào của m, bất phương trình được nghiệm đúng với mọi số thực x :

a) $x^2 + 2(m - 1)x + m + 5 > 0 \qquad (1)$

b) $mx^2 + (m - 3)x + m - 3 < 0 \qquad (2)$

Giải

a) Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in R$ khi biệt thức của tam thức vế trái nhỏ hơn 0

$$\Delta' = (m-1)^2 - (m+5) = m^2 - 3m - 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < m < 4$$

b) Nếu $m = 0$ thì (2) trở thành $-3x - 3 < 0$

Tập nghiệm là $(-1; +\infty)$ khác R. Vậy loại trường hợp $m = 0$.

Nếu $m \neq 0$ thì (2) là bất phương trình bậc hai.

Để (2) được nghiệm đúng với mọi $x \in R$ thì tam thức vế trái phải có hệ số $m < 0$ và biệt thức $\Delta < 0$. Ta có

$$\Delta = (m-3)^2 - 4m(m-3) = -3m^2 + 6m + 9 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad m = -1$ hoặc $m = 3$

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m^2 + 6m + 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m < -1$$

Kết luận : Với $m < -1$ thì (2) được nghiệm đúng với mọi $x \in R$.

160 Với giá trị nào của tham số m hệ bất phương trình sau đây có nghiệm

$$(I)\begin{cases} x^2 + 7x - 8 < 0 & (1) \\ (m^2 - 3m + 2)x > 2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có : $x^2 + 7x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -8$ hoặc $x = 1$

(1) $\Leftrightarrow \quad -8 < x < 1$

Xét bất phương trình (2)

Ta có : $m^2 - 3m + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\quad m = 1$ hoặc $m = 2$

thì (2) trở thành $0x > 2$, vô nghiệm. Do đó hệ (I) vô nghiệm.

- Nếu $m < 1$ hoặc $m > 2$ thì $m^2 - 3m + 2 > 0$

(2) $\Leftrightarrow \quad x > \dfrac{2}{m^2 - 3m + 2}$

Hệ (I) có nghiệm nếu $S = (-8; 1) \cap \left(\dfrac{2}{m^2 - 3m + 2}; +\infty\right) \neq \varnothing$

Điều này xảy ra nếu $\dfrac{2}{m^2 - 3m + 2} < 1$

$$\begin{cases} m < 1 \\ \dfrac{2}{m^2 - 3m + 2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m < 1$$

$$\begin{cases} m > 2 \\ \dfrac{2}{m^2 - 3m + 2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m > 3.$$

Vậy hệ (I) có nghiệm nếu $m \notin [1; 3]$

- Nếu $1 < m < 2$ thì $m^2 - 3m + 2 < 0$

$$(2) \Leftrightarrow \quad x < \frac{2}{m^2 - 3m + 2}$$

Hệ (I) có nghiệm khi $S = (-8; 1) \cap \left(-\infty; \dfrac{2}{m^2 - 3m + 2}\right) \neq \varnothing$

Điều này xảy ra khi $-8 < \dfrac{2}{m^2 - 3m + 2}$. Xét hệ sau :

$$\begin{cases} 1 < m < 2 \\ -8 < \dfrac{2}{m^2 - 3m + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 2 \\ \dfrac{8m^2 - 24m + 18}{m^2 - 3m + 2} > 0 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm.

Kết kuận : Với $m < 1$ hoặc $m > 3$ hệ (I) có nghiệm.

161 Giải và biện luận hệ bất phương trình theo tham số m :

$$(I) \begin{cases} x^2 - (m + 1)x + 2(m - 1) \leq 0 & (1) \\ x^2 - (m + 2)x + 3(m - 1) > 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Xét $f(x) = x^2 - (m + 1)x + 2(m - 1)$ có biệt thức

$$\Delta_f = (m + 1)^2 - 8(m - 1) = (m - 3)^2 \geq 0 \ \forall m \in R$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \quad x = x_1 = m - 1 \text{ hoặc } x = x_2 = 2$$

- Nếu $m = 3$ thì $m - 1 = 2$ và (1) có nghiệm duy nhất $x = 2$
- Nếu $m - 1 < 2 \Leftrightarrow m < 3$, $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow m - 1 \leq x \leq 2$
- Nếu $2 < m - 1 \Leftrightarrow m > 3$, $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq m - 1$

Xét vế trái của bất phương trình (2) : $g(x) = x^2 - (m + 2)x + 3(m - 1)$ có biệt thức :

$$\Delta_g = (m + 2)^2 - 12(m - 1) = (m - 4)^2 \geq 0 \ \forall m \in R$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \quad x = x_1 = 3 \text{ hoặc } x = x_2 = m - 1$$

- Nếu $m = 4$ thì $3 = m - 1$ và (2) có nghiệm duy nhất $x = 3$
- Nếu $m - 1 < 3 \Leftrightarrow m < 4$, $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq m - 1$ hoặc $x \geq 3$
- Nếu $m - 1 > 3 \Leftrightarrow m > 4$, $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ hoặc $x \geq m - 1$

Tổng hợp các kết quả trên ta có :

- Nếu m ≤ 3 thì hệ (I) có tập nghiệm là :

$$S = [m - 1; 2] \cap [(-\infty; m - 1] \cup [3; +\infty)] = \{m - 1\}$$

- Nếu 3 < m thì hệ (I) có tập nghiệm là :

$$S = [2; m - 1] \cap [(-\infty; m - 1] \cup [3; +\infty)] = [2; m - 1]$$

- Nếu m > 4 thì hệ (I) có tập nghiệm là :

$$S = [2; m - 1] \cap [(-\infty; 3] \cup [m - 1; +\infty)] = [2; 3] \cup \{m - 1\}$$

Để dễ nhìn ta có thể tổng hợp các kết quả thành bảng sau :

m	$-\infty$		3		4		$+\infty$
S		$\{m-1\}$	$\{2\}$	$[2; m-1]$	$[2; 3]$	$[2; 3] \cup \{m-1\}$	

162 Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$f(x) = x^2 - 2(m + 1)x - 2m - 3 > 0 \qquad (1)$$

được nghiệm đúng với mọi x > 0.

Giải

Biệt thức của f(x) : $\Delta' = (m + 1)^2 + 2m + 3 = (m + 2)^2 \geq 0 \ \forall m$

- Nếu m = −2 thì f(x) > 0 ∀x > 0. Giá trị m = −2 thỏa mãn yêu cầu.
- Nếu m < −2 thì $\Delta > 0$, f(x) có các nghiệm $x_1 = -1 > x_2 = 2m + 3$

  tập nghiệm của (1) là : $S = (-\infty; 2m + 3) \cup (-1; +\infty)$

  Bất phương trình (1) được nghiệm đúng với ∀x > 0.
- Nếu m > −2 thì $\Delta > 0$ và f(x) có các nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = 2m + 3$

  Tập nghiệm của (1) là : $S = (-\infty; -1) \cup (2m + 3; +\infty)$

  Bất phương trình (1) được nghiệm đúng với ∀x > 0 khi

$$2m + 3 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \leq -\frac{3}{2}$$

Tổng hợp các kết quả ta thấy với $m \leq -\frac{3}{2}$ bất phương trình (1) được nghiệm đúng với ∀x > 0.

163 So sánh các nghiệm của phương trình với số cho tương ứng :

a) $x^2 - 12x - 64 = 0$ và 7 **b)** $-3x^2 + 10x - 7 = 0$ và 5.

Giải

a) $af(\alpha) = 1.(7^2 - 12.7 - 64) < 0$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 < x_2$ và $x_1 < 7 < x_2$.

b) $af(\alpha) = -3(-3(6)^2 + 10(5) - 7) = 96 > 0$

$$\Delta' = 5^2 - 3.7 = 4 > 0, \qquad \frac{S}{2} - \alpha = \frac{5}{3} - 5 < 0$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 < x_2$ và $x_1 < x_2 < 5$.

164 Tìm giá trị của tham số m sao cho phương trình

$$f(x) = x^2 - (m + 3)x + m + 6 = 0 \qquad (1)$$

có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện $|x| \le 4$.

Giải

Để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $|x| \le 4$ thì m phải là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \Delta = (m+3)^2 - 4(m+6) > 0 \\ af(-4) = 4(m+3) + m + 22 \ge 0 \\ af(4) = -4(m+3) + m + 22 \ge 0 \\ -4 \le \dfrac{S}{2} = \dfrac{m+3}{2} \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 15 > 0 \\ 5m + 34 \ge 0 \\ -3m + 10 \ge 0 \\ -11 \le m \le 5 \end{cases}$$

Giải hệ bất phương trình trên ta được kết quả :

$$m \in \left[-\frac{34}{5}; -5\right) \cup \left(3; \frac{10}{3}\right].$$

165 Tìm giá trị của tham số m sao cho phương trình :

$$f(x) = (m + 1)x^2 - 3mx + 4m = 0$$

có một nghiệm thuộc khoảng (- 1; 1) còn nghiệm kia nhỏ hơn -1.

Giải

Khi m = -1 phương trình chỉ có một nghiệm $x = \frac{4}{3}$ không thỏa mãn.

Ta tìm giá trị $m \ne -1$ để $f(x) = 0$ (có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < 1$. Điều này xảy ra khi m là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} f(-1)f(1) = (2m + 1)(8m + 1) < 0 \\ \dfrac{S}{2} - 1 = \dfrac{3m}{2(m+1)} - 1 = \dfrac{m - 1}{2(m+1)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{8}$$

Đáp số : $-\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{8}$.

166 Tìm giá trị của m sao cho phương trình :

$$f(x) = (m - 2)x^2 - 2(m + 3)x + 4 = 0$$

có 2 nghiệm trong đó có một nghiệm lớn hơn 3 và nghiệm kia nhỏ hơn 2.

Giải

Khi m = 2 phương trình trở thành $-10x + 4 = 0$ chỉ có một nghiệm.

Để có 2 nghiệm thỏa điều kiện $x_1 < 2 < 3 < x_2$ ắt có và đủ là :

$$\begin{cases} af(2) = (m-2)[4(m-2) - 4(m+3) + 4] < 0 \\ af(3) = (m-2)[9(m-2) - 6(m+3) + 4] < 0 \end{cases}$$

Đáp số : $2 < m < \dfrac{32}{3}$.

167 Với giá trị nào của m phương trình :

$$f(x) = (m+1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$$

có ít nhất một nghiệm dương.

Giải

+ Phương trình có 1 nghiệm dương nếu :

$$(m+1)f(0) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m+1)(m+2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < m < -1$$

+ Phương trình có 2 nghiệm dương nếu :

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - (m+1)(m+2) > 0 \\ (m+1)f(0) = (m+1)(m+2) > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{m}{m+1} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m < -2$$

Gộp kết quả hai trường hợp : m < −1.

168 Với giá trị nào của tham số m phương trình : $f(x) = m^2x^2 + mx - 2 = 0$ có hai nghiệm, trong đó một nghiệm có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1, một nghiệm có giá trị tuyệt đối lớn hơn 1.

Giải

Bài toán tương đương với tìm giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm trong đó có đúng một nghiệm trong khoảng (−1; 1). Điều kiện đó là :

m	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$m^2 + m - 2$		+	0	−		−	0	+		+	
$m^2 - m - 2$		+		+	0	−		−	0	+	
VT (1)		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Đáp số : $m \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

Chương 5

THỐNG KÊ

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. BẢNG PHÂN PHỐI THỰC NGHIỆM

1. *Vấn đề mà người điều tra quan tâm gọi là **dấu hiệu** thường được kí hiệu bằng chữ cái in hoa : X, Y, Z ... Mỗi đơn vị điều tra tương ứng với một số hiệu gọi là **giá trị** của dấu hiệu.*

2. ***Bảng phân phối thực nghiệm tần số hay tần suất rời rạc** là bảng gồm hai dòng (cột). Một dòng (cột) ghi các giá trị khác nhau của dấu hiệu. Một dòng (cột) ghi tần số hay tần suất tương ứng của các giá trị.*

3. ***Phân lớp** (ghép lớp, nhóm) **các giá trị của dấu hiệu***

   Khi một bảng thống kê có một số lớn số liệu thì người ta xử lí bằng cách ghép lớp (nhóm). Các giá trị nằm trong một nửa khoảng $[x_i; x_{i+1})$ *là một lớp* ($i = 1, 2, ..., h$)

   + *Số* $x_i^0 = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ *là giá trị trung tâm của lớp thứ i*

   + *Số* n_i *các giá trị nằm trong lớp thứ i là **tần số của lớp thứ i***

   + *Số* $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ *(*n_i *là tần số lớp thứ i, n là các số liệu thống kê)*

   *gọi là **tần suất của lớp thứ i**.*

4. ***Bảng phân phối thực nghiệm tần số hay tần suất ghép lớp***

   Là bảng ghi các cột

   - *Một cột ghi các lớp*
   - *Một cột ghi các giá trị trung tâm tương ứng của các lớp*
   - *Một cột ghi các tần số hay tần suất tương ứng của các lớp.*

5. ***Biểu đồ tần suất***

   Để biểu diễn bảng phân phối thực nghiệm người ta dùng biểu đồ hình cột hay đường gấp khúc tần suất hay biểu đồ hình quạt.

BÀI TẬP

169 Chọn ngẫu nhiên 30 nam thanh niên và ghi số cỡ giầy của họ, ta được bảng sau :

39	41	40	43	41	40	44	42	41	43
41	42	39	40	42	43	41	41	42	39
42	42	41	42	40	41	43	41	39	40

Hãy lập : **a)** Bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc.

b) Bảng phân phối thực nghiệm tần suất rời rạc.

Giải

a) Bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc :

x	39	40	41	42	43	44	
n	4	5	9	7	4	1	$\sum = 30$

b) Bảng phân phối thực nghiệm tần suất rời rạc :

x	39	40	41	42	43	44	
f_i	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\sum f_i = 1$

170 Đo chiều cao (cm) của 50 học sinh lứa tuổi 12 ta được bảng sau :

126	120	132	125	137	136	137	130	145	140
124	133	131	141	129	139	135	137	142	147
142	130	135	131	143	130	136	135	129	135
137	125	132	136	128	129	143	151	139	135
133	134	137	138	132	135	136	134	128	139

a) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp với các lớp [120; 124), [124; 128), [128; 132), [132; 136), [136; 140), [140; 144), [144; 148), [148; 152).

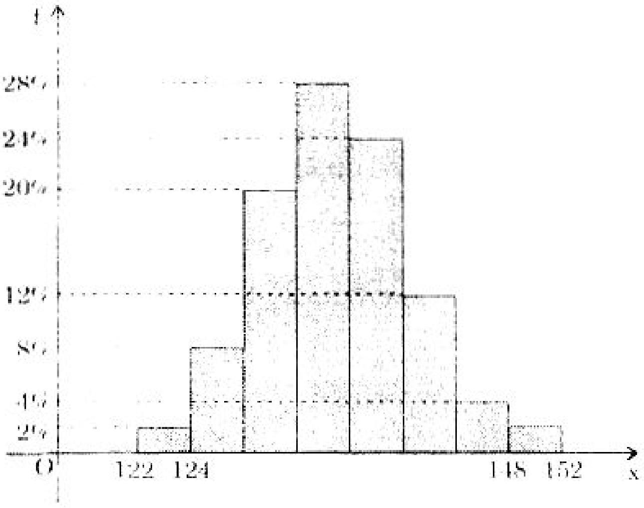
b) Theo bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột, và đường gấp khúc tần suất.

Giải

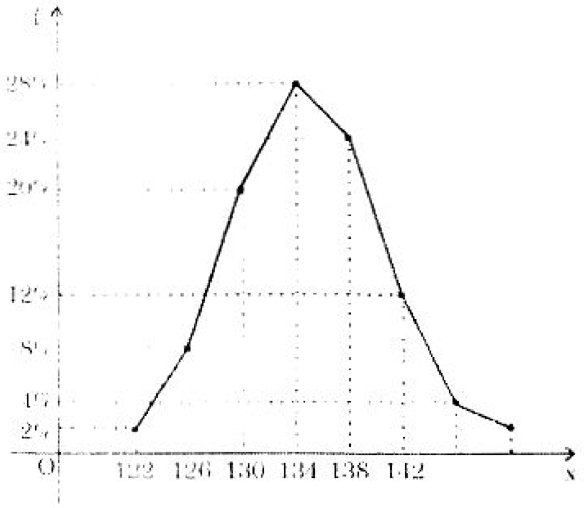
a)

TT	Các lớp	Giá trị trung tâm	Tần số	Tần suất
1	[120; 124)	122	1	1 : 50 (2%)
2	[124; 128)	126	4	4 : 50 (8%)
3	[128; 132)	130	10	10 : 50 (20%)
4	[132; 136)	134	14	14 : 50 (28%)
5	[136; 140)	138	12	12 : 50 (24%)
6	[140; 144)	142	6	6 : 50 (12%)
7	[144; 148)	146	2	2 : 50 (4%)
8	[148; 152)	150	1	1 : 50 (2%)

b) Biểu đồ hình cột (hình ha), đường gấp khúc tần suất (hình b) của bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp.



h.a



h.b

171 Cân nặng 79 thanh niên được chọn ngẫu nhiên tại một địa phương, ta được bảng số liệu sau :

43 52 53 54 45 54 59 54 48 40 56 53 59 42 43
49 51 51 44 57 51 45 50 42 51 56 57 50 50 51
55 50 53 48 46 47 51 51 57 52 48 56 50 47 53
42 50 51 60 51 50 57 55 49 53 56 49 46 55 56
47 50 47 54

Xây dựng bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp vẽ biểu đồ hình cột và đường gấp khúc tần suất với các lớp [40; 44), [44; 48), ...

Giải

Thứ tự	Lớp	Giá trị trung tâm	Tần số
1	[40; 44)	42	6
2	[44; 48)	46	9
3	[48; 52)	50	31
4	[52; 56)	54	17
5	[56; 60)	58	12
6	[60; 64)	62	4

Bạn tự vẽ biểu đồ.

II. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG

1. Số trung bình *(Số trung bình cộng)*

+ *Thường dấu hiệu có phân phối thực nghiệm rời rạc*

X_i	x_1	x_2 ...	x_i	x_k
n_i	n_1	n_2 ...	n_i	n_k

$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

Số trung bình được tính theo công thức

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_ix_i + \ldots + n_kx_k)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i = \sum_{i=1}^{k} f_ix_i \left(f_ix_i = \frac{n_i}{n}\right)$$

+ *Nếu dấu hiệu có phân phối thực nghiệm ghép lớp thì trong công thức trên ta thay x_i bằng giá trị trung tâm x_i^0 của lớp thứ i.*

2. Mốt

+ *Nếu bảng phân phối thực nghiệm tần số giá trị M_0 của dấu hiệu X có tần số lớn hơn các tần số khác thì M_0 là* ***mốt của X***

+ *Nếu trong bảng có hai giá trị của X là M_1 và M_2 kề nhau có tần số bằng nhau và lớn hơn các tần số khác thì*

$$\text{mốt}(X) = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) \quad \text{(nếu số này có nghĩa)}$$

+ *Nếu có nhiều hơn một giá trị có tần số bằng nhau là lớn nhất thì X là* ***đa mốt****.*

3. Số trung vị

Nếu bảng số liệu thống kê được sắp thứ tự không giảm

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$$

ta gọi là ***số trung vị*** *của dãy, kí hiệu* M_e

$$M_e = \begin{cases} x_{k+1} & \text{nếu } n = 2k+1,\ k \in N \\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2} & \text{nếu } n = 2k,\ k \in N \end{cases}$$

4. Phương sai

Phương sai của dấu hiệu X, kí hiệu S_X^2

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i^2 - (\overline{x})^2$$

trong đó $\bar{x}$ là số trung bình của X.

Nếu là phân phối ghép lớp thì thay x_i bởi x_i''.

5. Độ lệch chuẩn

Độ lệch chuẩn của dấu hiệu X là : $S_X = \sqrt{S_X^2}$.

BÀI TẬP

172 Kết quả kiểm tra môn Vật lí, 30 học sinh được kết quả ghi trong bảng sau :

8	9	7	6	8	5	10	9	6	8
10	7	7	8	4	5	7	4	9	8
6	3	5	3	10	9	4	7	6	8

a) Lập bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc về điểm.

b) Lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất rời rạc.

c) Tìm số trung bình về điểm kiểm tra.

Giải

a) Bảng phân phối thực nghiệm tần số

(x_i)	3	4	5	6	7	8	9	10	
n_i	2	3	3	4	5	6	4	3	$\sum n_i = 30$

b) Bảng phân phối thực nghiệm tần suất

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	
f_i	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\sum f_i = 1$

c) Theo bảng phân phối thực nghiệm tần số ta tính được số trung bình như sau :

$$\bar{x} = \frac{1}{30}(2 \times 3 + 3 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 + 5 \times 7 + 6 \times 8 + 4 \times 9 + 3 \times 10)$$

$$= \frac{206}{30} \approx 6{,}87.$$

173 Theo bảng số liệu trong bài 170. Hãy tính chiều cao trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của chiều cao (dựa trên phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp) [120; 124), [124; 128), ...

Giải

Theo kết quả bài 170 ta có :

a) Số trung bình :

$$\bar{x} = \frac{1}{50}(122 + 4 \times 126 + 10 \times 130 + 14 \times 134 + 12 \times 138 + 6 \times 142 + 2 \times 146 + 150)$$

$$= \frac{6752}{50} = 135{,}04$$

b) Phương sai :

$$S_X^2 = \frac{1}{50}(1 \times 122^2 + 4 \times 126^2 + 10 \times 130^2 + 14 \times 134^2 + 12 \times 138^2 + 6 \times 142^2 + 2 \times 146^2 + 1 \times 150^2) - \bar{x}^2$$

$$= \frac{913416}{50} - (135{,}04)^2 \approx 32{,}52$$

c) Độ lệch chuẩn : $S_X = \sqrt{S_X^2} \approx 5{,}70.$

174 Lấy 30 chiếc áo trong một cửa hàng, ta được bảng ghi cỡ áo như sau :

39	38	40	37	39	44	42	43	40	41
38	40	39	40	41	38	41	40	39	43
42	41	37	41	42	40	39	42	40	38

a) Lập bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc.

b) Tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn, mốt.

Giải

a)

x_i	37	38	39	40	41	42	43	44	
n_i	2	4	5	7	5	4	2	1	$\sum n_i = 30$

b) Số trung bình :

$$\bar{x} = \frac{1}{30}(2 \times 37 + 4 \times 38 + 5 \times 39 + 7 \times 40 + 5 \times 41 + 4 \times 42 + 2 \times 43 + 44)$$

$$= \frac{1204}{30} \approx 40{,}13$$

– Phương sai :

$$S_X^2 = \frac{1}{30}(2.37^2 + 4.38^2 + 5.39^2 + 7.40^2 + 5.41^2 + 4.42^2 + 2.43^2 + 44^2) - \bar{x}^2$$

$$= \frac{48414}{30} - (40{,}13)^2 \approx 3{,}38$$

+ Độ lệch chuẩn : $S_X = \sqrt{S_X^2} \approx 1,84$

+ Số mốt : $M_o = 40$.

175 Lượng điện tiêu thụ trong 1 tháng của 9 hộ trong một chung cư (đơn vị Kwh) được ghi như sau :

124 143 139 152 131 129 143 134 165

Tính số trung bình, số trung vị, mốt và độ lệch chuẩn.

Giải

+ Số trung bình :

$$\bar{x} = \frac{124 + 143 + 139 + 151 + 131 + 129 + 143 + 134 + 165}{9} \approx 139,89$$

+ Sắp thứ tự không giảm dãy giá trị :

124 129 131 134 139 143 143 152 165

Số mốt : $M_o = 143$

Số trung vị : $M_e = 139$

Phương sai :

$$S_X^2 = \frac{1}{9}(124^2 + 129^2 + \dots + 165^2) - (139.89)^2 \approx 173.23$$

Độ lệch chuẩn : $S_X \approx 13.16$.

176 Kết quả kiểm tra tiếng Anh của 32 học sinh (tính theo thang điểm 100) được cho trong bảng sau :

68	52	49	56	69	74	41	59
79	61	42	57	60	88	87	47
65	55	58	65	50	78	61	90
86	65	66	72	63	95	72	74

a) Lập bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép nhóm với các nhóm [40; 50), [50; 60), ..., [90; 100).

b) Tính số trung bình theo bảng phân phối thực nghiệm rời rạc và theo phân phối thực nghiệm ghép nhóm và so sánh.

Giải

a) Bảng phân phối thực nghiệm theo tần số ghép nhóm :

Nhóm	TTT	Tần số	
[40; 50)	45	4	
[50; 60)	55	6	
[60; 70)	65	11	
[70; 80)	75	6	
[80; 90)	85	3	
[90; 100)	95	2	$\sum n_i = 32$

b) Tính số trung bình theo phân phối rời rạc

$$\overline{x} = \frac{1}{32}(41 + 42 + 47 + \ldots + 90 + 95) = \frac{2114}{32} \approx 66{,}06$$

Tính số trung bình theo phân phối thực nghiệm ghép nhóm

$$\overline{x'} = \frac{1}{32}(4.45 + 6.55 + 11.65 + 6.75 + 3.85 + 2.95)$$

$$= \frac{2120}{32} \approx 66{,}25$$

Sai số tương đối : $\dfrac{66,25 - 66,06}{66.06} \approx 3$‰

Chương 6

GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

1. Đơn vị đo góc và cung tròn

Số đo của cung tròn là số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

a) Độ. *Một độ kí hiệu* 1^0 *là số đo của góc* $\frac{1}{180}$ *góc bẹt (hay số đo của cung* $\frac{1}{180}$ *nửa đường tròn)*

$$1^0 = 60' \text{ (phút)}, \qquad 1' = 60'' \text{ (giây)}$$

b) Radian. *Một* ***radian*** *kí hiệu 1 rad, là số đo cung tròn có độ dài bằng bán kính đường tròn chứa cung đó*

$$1^0 = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$$

2. Độ dài cung tròn

Cung $\overset{\frown}{AB}$ *của đường tròn bán kính R có số đo* a^0 *(hay* α *rad) có độ dài :*

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi R a}{180} \; (l_{\overset{\frown}{AB}} = R\alpha)$$

3. Số đo của góc (cung) lượng giác

Góc lượng giác *có tia đầu (tia gốc) Ox và tia cuối Oy, kí hiệu (Ox; Oy). Số đo của (Ox; Oy) là một số đại số, kí hiệu sđ(Ox; Oy) hay (Ox; Oy) cũng để chỉ số đo của chính góc đó.*

Các góc lượng giác có chung tia gốc và tia ngọn có các số đo sai khác nhau bội nguyên của 360^0 *(hay* 2π*)*

$$(Ox; Oy) = a^0 + k360^0 \qquad ((Ox; Oy) = \alpha + k2\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Cung lượng giác *có điểm đầu A và điểm cuối B kí hiệu* $\overset{\curvearrowright}{AB}$

Tương tự như góc lượng giác ta có số đo của $\overset{\curvearrowright}{AB}$ *là sđ*$\overset{\curvearrowright}{AB}$ *hay* $\overset{\curvearrowright}{AB}$ *:*

$$\text{sđ}\overset{\curvearrowright}{AB} = a^0 + k360^0 \qquad (\text{hay sđ}\overset{\curvearrowright}{AB} = \alpha + k2\pi)\ k \in \mathbb{Z}.$$

3. Hệ thức Salơ

Cho 3 tia bất kì chung gốc Ox, Oy, Oz ta luôn có :

$$(Ox; Oy) + (Oy; Oz) = (Ox; Oz) + k360^0 \text{ (hay } k2\pi), \ k \in Z$$

Cho 3 điểm bất kì A, B, C trên đường tròn định hướng thì :

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC} + k360^0 \text{ (hay } k2\pi), \ k \in Z.$$

BÀI TẬP

177 Tìm số đo theo đơn vị radian các góc có số đo bằng độ lần lượt 18^0, 75^0, 65^0, $16^0 34'$.

Giải

$$18^0 = \frac{\pi}{180}.18 = \frac{\pi}{10}; \qquad 75^0 = \frac{\pi}{180}..75 = \frac{5\pi}{12}$$

$$65^0 = \frac{\pi}{180}.65 = \frac{13\pi}{36}; \qquad 16^0 34' = \left(16 + \frac{17}{30}\right)^0 = \left(\frac{497}{30}\right)^0 = \frac{\pi}{180}.\frac{497}{30} = \frac{497\pi}{5400}.$$

178 Tìm số đo bằng độ các góc có số đo bằng radian sau : 3,9; 0,75; $\frac{4\pi}{9}$.

Giải

$$3{,}9 \text{ (rad)} = \frac{180}{\pi}.3{,}9 = \left(\frac{702}{\pi}\right)^0; \qquad 0{,}75 = \frac{180}{\pi}.0{,}75 = \left(\frac{135}{\pi}\right)^0$$

$$\frac{4\pi}{9} = \frac{180}{\pi}.\frac{4\pi}{9} = 80^0.$$

179 Cho (Ox; Oy) = $405^0 + k2\pi$. Hãy tìm các góc lượng giác có tia đầu Ox và tia cuối Oy có số đo bằng độ mà giá trị tuyệt đối không vượt quá 1200.

Giải

Ta phải tìm số $k \in Z$ sao cho :

$$-1200 \leq 405 + k.360 \leq 1200, \ k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad -1605 \leq k.360 \leq 795, \ k \in Z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1605}{360} \leq k \leq \frac{795}{360}, \ k \in Z.$$

$$\Rightarrow \quad k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

Vậy các góc cần tìm có số đo lần lượt là : -1035^0, -675^0, -315^0, 45^0, 405^0, 765^0, 1125^0.

180 Tìm độ dài các cung của đường tròn bán kính 5cm có số đo theo thứ tự là : $\frac{2\pi}{5}$; $1,4$; 60^0; 78^0.

Giải

Độ dài cung có số đo $\frac{2\pi}{5}$ là : $l = 5.\frac{2\pi}{5} = 2\pi\text{cm} \approx 6,28\text{cm}$.

cung 1,4 độ dài : $l = 5.1,4 = 7\text{cm}$.

cung 60^0 độ dài : $l = 5.\frac{\pi}{180}.60 = 5\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{cm} \approx 5,24\text{cm}$.

cung 78^0 độ dài : $l = 5.\frac{\pi}{180}.78 = 5.\left(\frac{78\pi}{180}\right)\text{cm} \approx 6,81\text{cm}$.

181 Sử dụng máy tính bỏ túi tìm số đo tính bằng độ của góc có số đo bằng radian là $\frac{3\pi}{7}$.

Giải

(Dùng máy tính bỏ túi chẳng hạn Casio fX – 500MS) ta nhấn các nút sau :

$\boxed{\text{ON}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{1}\boxed{(}\boxed{3}\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\pi}\boxed{\div}\boxed{7}\boxed{)}$

$\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{DRG}}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{\circ\,,,}$

Máy hiện ra $77^0 8'34.29$ tức là $77^0 8'34''$ và $\frac{29''}{100}$

Làm tròn ta có $\frac{3\pi}{7} \approx 77^0 8'34''$.

182 Sử dụng máy tính bỏ túi tìm số đo theo đơn vị radian góc có số đo $83^0 12'45''$.

Giải

Dùng máy tính bỏ túi Casio fX 500MS ta nhấn như sau :

$\boxed{\text{ON}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{2}\boxed{8}\boxed{3}\boxed{\circ\,,,}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{\circ\,,,}\boxed{4}\boxed{5}$

$\boxed{\circ\,,,}\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{DRG}}\boxed{4}\boxed{=}$

Máy hiện ra 1,452332104.

Làm tròn ta được $83^0 12'45'' \approx 1,45$ (rad).

183 Dùng máy tính bỏ túi

a) Đổi đơn vị đo từ độ ra radian góc có số đo 1437^0.

b) Đổi đơn vị đo từ radian ra độ góc $\frac{43\pi}{3}$.

Giải

Thực hiện như các bài 181, 182.

Đáp số : **a)** $\approx 25{,}08$ (rad) **b)** 2580^0.

184 Tìm độ dài các cung đường tròn đường kính 10dm có số đo theo thứ tự là : $\frac{7\pi}{9}$; $137^0 25'$.

Giải

Độ dài cung có số đo $\frac{7\pi}{9}$ là :

$$l = R\alpha = 5.\frac{7\pi}{9} = \frac{35}{9}\pi \text{ (dm)} \approx 12{,}22\text{dm}.$$

Độ dài cung có số đo $137^0 25'$ là :

$$l = \frac{\pi R a}{180} = \frac{5\pi}{180}.137^0 25' = \frac{5\pi}{180}.137\frac{5}{12} = \frac{5\pi}{180}.\frac{1649}{12} \approx 11{,}99\text{dm}.$$

185 Trên đường tròn bán kính 8cm. Có hai cung có độ dài theo thứ tự là 6cm và 15cm. Tìm số đo theo đơn vị radian của các cung đó.

Giải

Theo công thức : $a \text{ (rad)} = \frac{l}{R}$ (l là độ dài cung, R là bán kính). Ta có :

- Số đo của cung 6cm là : $a = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

- Số đo của cung 15cm là : $a = \frac{15}{8}$ (rad).

186 Tìm số đo bằng đơn vị độ các cung của đường tròn bán kính 2dm. Có độ dài theo thứ tự 45cm và 55cm.

Giải

Sử dụng công thức $a^0 = \frac{180}{\pi}.\frac{l}{R}$ ta có :

– Số đo cung dài 45cm là : $a^{0} = \frac{180}{\pi}.\frac{45}{20} = \left(\frac{405}{\pi}\right)^{0} \approx 128^{0}55'$

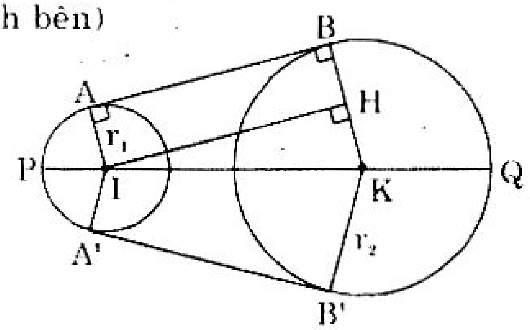
– Số đo cung dài 55cm là : $a^{0} = \frac{180}{\pi}.\frac{55}{20} = \left(\frac{495}{\pi}\right)^{0} \approx 157^{0}33'$.

187 Hai bánh xe tròn trên cùng mặt phẳng được truyền động bởi một dây cu-roa. Các bán kính có độ dài r_1 và r_2, khoảng cách hai tâm các bánh xe là d. Tính độ dài dây cu-roa.

Áp dụng : Tính độ dài khi $r_1 = 1cm$, $r_2 = 4cm$, $d = 6cm$.

Giải

Gọi các tâm bánh xe là I, K. Các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn theo thứ tự là AB và A'B' (xem hình bên)



Ta có :

$$sd\overset{\frown}{AA'} = sd\overset{\frown}{BB'} = 2\widehat{HKI}$$

$$\cos\widehat{HKI} = \frac{HK}{IK} = \frac{|r_2 - r_1|}{d}$$

Độ dài dây cu-roa :

$$l = 2(AB + \overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{BQ}) = 2(d\sin\widehat{HKI} + r_1\widehat{HKI} + r_2(\pi - \widehat{HKI}))$$

Trong đó $\widehat{HKI}$ tính theo đơn vị radian.

Áp dụng : $r_1 = 1cm$, $r_2 = 4cm$, $d = 6cm$ ta có :

$$\cos\widehat{HKI} = \frac{|4-1|}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{HKI} = \frac{\pi}{3}.$$

Thay vào ta được : $l = 2\left(6\frac{\sqrt{3}}{2} + 1.\frac{\pi}{3} + 4.\frac{2\pi}{3}\right) = 6(\sqrt{3} + \pi)$ cm

$$l \approx 29{,}24cm.$$

188 Trên mặt phẳng tọa độ, hãy xác định điểm cuối (điểm ngọn) của cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ thuộc góc phần tư nào trong mỗi trường hợp sau đây :

a) $\overset{\frown}{AM} = 2006^{0} + k360^{0}$, **b)** $\overset{\frown}{AM} = \frac{2005\pi}{11} + k2\pi$.

Giải

a) Ta có : $2006^{0} = 5 \times 360^{0} + 206^{0}$ và $180^{0} < 206^{0} < 270^{0}$

Điểm M nằm trong góc phần tư thứ ba.

b) Ta có : $\frac{2005\pi}{11} = 91 \times 2\pi + \frac{3\pi}{11}$ và $0 < \frac{3\pi}{11} < \frac{\pi}{2}$

Điểm cuối M nằm trong góc phần tư thứ nhất.

189 Cho góc lượng giác $(Ox; Ot) = \frac{2\pi}{7}$. Trong số các góc lượng giác có tia đầu Ox và có số đo theo thứ tự là : 5472^0, -1300^0, 1130^0, $\frac{219\pi}{7}$, $-\frac{180\pi}{7}$ có những góc nào có cùng tia cuối với góc đã cho ?

Giải

Các góc lượng giác (Ox; Ot) có số đo :

$$(Ox; Ot) = \frac{2\pi}{7} + k2\pi = 51\frac{3}{7}^0 + k360^0,\ k \in Z$$

$5472^0 = 15.360^0 + 72^0$; $-1300^0 = -4.360^0 + 140^0$

$1130^0 = 3,360 + 50^0$; $\frac{219}{7}\pi = 15.2\pi + \frac{9}{7}\pi$

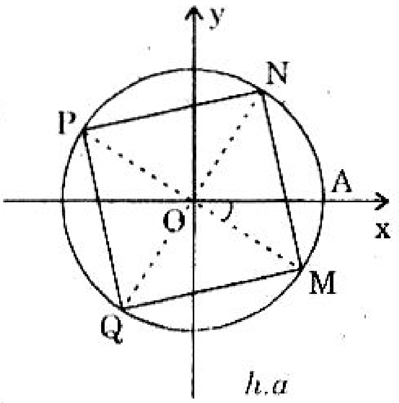
$\frac{-180\pi}{7} = -13.2\pi + \frac{2.\pi}{7}$.

Vậy góc có số đo $-\frac{180\pi}{7}$ có chung tia cuối với góc đã cho.

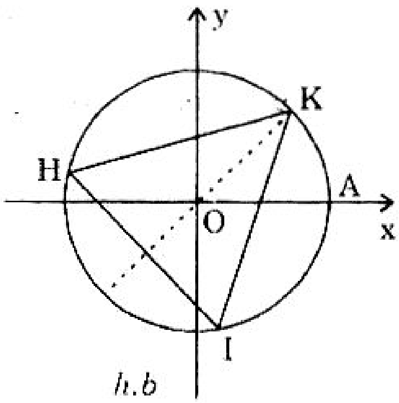
190 Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các cung lượng giác có số đo :

a) $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$; **b)** $\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in Z$.

Giải



h.a



h.b

a) Xem hình a. Các điểm cuối là các đỉnh của hình vuông MNPQ với $\overset{\frown}{AM} = -\frac{\pi}{6}$.

b) Xem hình b. Các điểm cuối là các đỉnh của tam giác đều KHI với $\overset{\frown}{AK} = 45^0$.

II. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

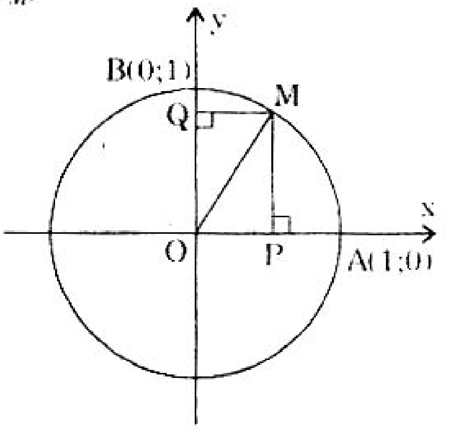
1. Các giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác

Trên đường tròn lượng giác lấy điểm $M(x_M; y_M)$

Đặt $(OA; OM) = \alpha$ (hay $\overset{\frown}{AM} = \alpha$)

Ta gọi : $\sin\alpha = OQ = y_M$, $\cos\alpha = OP = x_M$

- Nếu $\cos\alpha \neq 0$ thì $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- Nếu $\sin\alpha \neq 0$ thì $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$



Các tính chất :

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$, $k \in Z$

$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$, $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$, $k \in Z$.

2. Các hệ thức lượng giác cơ bản

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$ $\left(\text{với } \alpha \neq \dfrac{k\pi}{2},\ k \in Z\right)$
3. $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right)$
4. $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\alpha \neq k\pi,\ k \in Z)$

3. Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt

a) Góc (cung) đối nhau

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

b) Góc (cung) bù nhau

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$, $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

c) Góc (cung) hơn π

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$, $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

d) Góc (cung) phụ nhau

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha,\qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha.$$

BÀI TẬP

191 Tìm các giá trị lượng giác của các góc : 1050^0, $\frac{29\pi}{6}$.

Giải

a) Ta có : $1050^0 = 3.360^0 - 30^0$

$$\sin 1050^0 = \sin(3.360^0 - 30^0) = \sin(-30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 1050^0 = \cos(-30^0) = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 1050^0 = \left(-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 1050^0 = \frac{1}{\text{tg}1050^0} = -\sqrt{3}.$$

b)

$$\frac{29\pi}{6} = \frac{30\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 5\pi - \frac{\pi}{6} = 4\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\frac{29\pi}{6} = \sin\left(4\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{29\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{29\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{-\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}:\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\frac{29\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

192 Đơn giản biểu thức :

a) $A = \cos^2 80^0 + \cos^2 70^0 + \cos^2 60^0 + \cos^2 50^0 + \cos^2 40^0 + \cos^2 30^0 + \cos^2 20^0 + \cos^2 10^0$.

b) $B = \cos 10^0 + \cos 20^0 + \cos 30^0 + \ldots + \cos 150^0 + \cos 160^0 + \cos 170^0 + \cos 180^0$.

Giải

a) $A = (\cos^2 80^0 + \cos^2 10^0) + (\cos^2 70^0 + \cos^2 20^0) + (\cos^2 60^0 + \cos^2 30^0) + (\cos^2 50^0 + \cos^2 40^0)$

$= (\cos^2 80^0 + \sin^2 80^0) + (\cos^2 70^0 + \sin^2 70^0) + (\cos^2 60^0 + \sin^2 60^0) + (\cos^2 50^0 + \sin^2 50^0)$

$= 4$

b) $B = (\cos 10^0 + \cos 170^0) + (\cos 20^0 + \cos 160^0) + \ldots + \cos 90^0 + \cos 180^0$

$= (\cos 10^0 + \cos(180^0 - 10^0)) + (\cos 20^0 + \cos(180^0 - 20^0)) + \ldots + \cos 90^0 + \cos 180^0$

$= (\cos 10^0 - \cos 10^0) + (\cos 20^0 - \cos 20^0) + \ldots + \cos 180^0$

$= -1.$

193 Rút gọn biểu thức :

a) $A = \cot(7\pi - x) + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) - \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + x)$

b) $B = \dfrac{\cos 36^0 - \sin 234^0}{\sin 144^0 - \cos 126^0}.\cot 54^0.$

Giải

a) $A = -\cot x + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi + x) = -2\sin x$

b) $B = \dfrac{\cos 36^0 - \sin(180^0 + 90^0 - 36^0)}{\sin(180^0 - 36^0) - \cos[180^0 - (90^0 - 36^0)]}.\tan 36^0$

$= \dfrac{2\cos 36^0.\sin 36^0}{2\sin 36^0 \cos 36^0} = 1.$

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC HƠN $\frac{\pi}{2}$

194 Chứng minh công thức giá trị lượng giác của các góc hơn $\frac{\pi}{2}$

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$

c) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$

d) $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha.$

Giải

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ (góc bù nhau)

$= \cos\alpha$ (góc phụ nhau)

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ (góc bù nhau)

$= -\sin\alpha$ (góc phụ nhau)

c), d) giải tương tự.

195 Không dùng bảng và máy tính, hãy tìm giá trị lượng giác của các góc 4815° và $\frac{185\pi}{6}$.

Giải

a) $4815^\circ = 13\times 360^\circ + 135^\circ$

$\sin 4815^\circ = \sin(13.360^\circ + 135^\circ) = \sin 135^\circ$

Ta lại có : $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$.

Suy ra : $\sin 4815^\circ = \sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 4815^\circ = \cos 135^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 4815^\circ = \cot 4815^\circ = -1$

Ghi chú : Ta cũng có thể phân tích $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$

Dùng công thức giá trị lượng giác của các góc bù nhau ta có :

$\sin 4815^\circ = \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 4815^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $\frac{185\pi}{6} = 15.2\pi + \frac{5\pi}{6}$

$\sin\frac{185\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{185\pi}{6} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{185\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cot\frac{185\pi}{6} = -\sqrt{3}$.

196 Rút gọn biểu thức : **a)** $A = \cot x\left(\dfrac{1+\sin^2 x}{\cos x} - \cos x\right)$

$$\textbf{b)}\ B = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)\tan(\pi+x)}{\sin(\pi+x)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\tan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}.$$

Giải

$$\textbf{a)}\ A = \frac{\cos x}{\sin x}\left(\frac{1+\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x.2\sin^2 x}{\sin x\cos x} = 2\sin x$$

$$\textbf{b)}\ B = \frac{\cos\left(\pi+\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\cos\left(2\pi+x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan x}{\sin(\pi+x)\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan\left(-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)}$$

$$= \frac{-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x}{(-\sin x)\left(-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)\left(-\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}.\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin x}{\cos x} = \tan^2 x.$$

197 Rút gọn các biểu thức :

$$\textbf{a)}\ A = \cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$$

$$\textbf{b)}\ B = \cos(7\pi+x)-2\sin\left(\frac{15\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{2}+x\right).$$

Giải

$$\textbf{a)}\ A = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}-4\pi\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}-4\pi\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\sin x+\cos x-\sin x-\cos x = -2\sin x$$

$$\textbf{b)}\ B = \cos(6\pi+\pi+x)-2\sin\left(8\pi-\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(10\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$= \cos(\pi+x)-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$= -\cos x+2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cos x+2\cos x+\cos x = 2\cos x.$$

198 Chứng minh đẳng thức : $\dfrac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \dfrac{2\cos x}{\sin x - \cos x + 1}$ (1)

Giải

Điều kiện xác định : $1 - \cos x \neq 0$, $\sin x - \cos x + 1 \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow \quad 2\cos x(1 - \cos x) = [\sin x + (\cos x - 1)][\sin x - (\cos x - 1)]$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos x - 2\cos^2 x = \sin^2 x - (\cos x - 1)^2$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos x - 2\cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x - 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow \quad 1 = \sin^2 + \cos^2 x.$

199 Rút gọn biểu thức :

a) $A = \sin x - \sqrt{\cot g^2 x - \cos^2 x}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$

b) $B = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} + \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ với $x \in (0; 180^\circ)$.

Giải

a) $A = \sin x - \sqrt{\cos^2 x\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right)} = \sin x - \dfrac{\cos^2 x}{|\sin x|}$

Do $180^\circ < x < 270^\circ$ nên $\sin x < 0$ và $A = \dfrac{1}{\sin x}$

b) $B = \sqrt{\dfrac{(1 + \cos x)^2}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} + \sqrt{\dfrac{(1 - \cos x)^2}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}} = \dfrac{|1 + \cos x|}{|\sin x|} + \dfrac{|1 - \cos x|}{|\sin x|}$

Vì $1 + \cos x \geq 0$, $1 - \cos x \geq 0$ $\forall x$, $0 < x < 180^\circ$, $\sin x > 0$

nên $B = \dfrac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{\sin x} = \dfrac{2}{\sin x}$.

200 Tìm các giá trị lượng giác x. Biết $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ và $\cos x = -\dfrac{3}{5}$.

Giải

Với $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ thì $\sin x > 0$. Ta có :

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{4}{3}, \qquad \cot x = -\frac{3}{4}.$$

201 Cho $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $A = \sin x\cos x$ **b)** $B = \sin^3 x + \cos^3 x$ **c)** $C = |\sin x - \cos x|$.

Giải

a) $A = \frac{1}{2}[(\sin x + \cos x)^2 - (\cos^2 x + \sin^2 x)] = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{9} - 1\right) = \frac{7}{18}$

b) $B = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{7}{18}\right) = \frac{22}{27}$

c) $C^2 = |\sin x - \cos x|^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = 1 - \frac{14}{18} = \frac{2}{9}$

$\Rightarrow C = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

202 Tính giá trị của biểu thức :

a) $A = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$, biết $0 < x < 90^\circ$ và $\sin x = \frac{1}{3}$

b) $B = \frac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x}{2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x}$, biết $\cot x = -3$.

Giải

a) Ta có : $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$

$\Rightarrow \quad \cot x = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1} = 2\sqrt{2}$ (vì $0 < x < 90^\circ$ nên $\cot x > 0$)

$\tan x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Suy ra $A = \frac{9}{7}$.

b) Biết $\cot x = -3$, suy ra $\sin x \neq 0$. Chia tử và mẫu thức của B cho $\sin^2 x$ ta được :

$$B = \frac{1 + 2\cot x - 2\cot^2 x}{2 - 3\cot x + 4\cot^2 x} = \frac{1 - 6 - 18}{2 + 9 + 36} = -\frac{23}{47}.$$

203 Cho $\tan x - \cot x = 1$ và $0 < x < 90^\circ$. Tìm các giá trị lượng giác của x.

Giải

Ta có : $\tan x - \frac{1}{\tan x} = 1 \Leftrightarrow \tan^2 x - \tan x - 1 = 0 \quad (*)$

Đặt tanx = X thì (*) có dạng : $X^2 - X - 1 = 0 \Leftrightarrow X_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Từ điều kiện $0 < x < 90^\circ$, suy ra tanx > 0 ta loại nghiệm $X_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ và

có : $\tan x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Từ đó suy ra :

$$\cot x = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}.$$

Với cosx > 0 ta có : $\cos x = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2}} = \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{10}}$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{5 - \sqrt{5}}{10}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}.$$

204 Chứng minh đẳng thức : $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$.

Giải

$$\begin{aligned}\cos^6 x + \sin^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3\\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)\\ &= [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x\cos^2 x]\\ &= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x \quad \text{(đpcm)}.\end{aligned}$$

205 Chứng minh các đẳng thức :

a) $\sin x\left(\sqrt{\dfrac{1}{2 + 2\cos x} + \dfrac{1}{2 - 2\cos x}} - \sin x\right) = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$ (1) với $0 < x < \pi$.

b) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$ (2)

Giải

a) VT của (1) : $\sin x\sqrt{\dfrac{1}{2(1 + \cos x)} + \dfrac{1}{2(1 - \cos x)}} - \sin^2 x =$

$$= \sin x\sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{2(1 - \cos^2 x)}} - \sin^2 x = \frac{\sin x}{|\sin x|} - \sin^2 x$$

Do $0 < x < \pi$ nên $|\sin x| = \sin x$

nên $\text{VT}(1) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = \text{VP}$ (đpcm)

b) $VP\ (2) = (1 + \cot^2x) + \cot x(1 + \cot^2x) = (1 + \cot^2x)(1 + \cot x)$

$$= \frac{1}{\sin^2 x}\left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = VT\ (\text{dpcm}).$$

206 Chứng minh các biểu thức sau đây có giá trị không phụ thuộc vào giá trị của x.

a) $A = (\sin^4x + \cos^4x - 1)(\tan^2x + \cot^2x + 2)$

b) $B = \dfrac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^4 x - 1}$.

Giải

a) $$A = [(\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x - 1]\left[\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\right]$$

$$= (-2\sin^2x\cos^2x)\left[\frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 2\cos^2 x\sin^2 x}{\cos^2 x.\sin^2 x}\right]$$

$= -2(\cos^2x + \sin^2x)^2 = -2$ không phụ thuộc vào x.

b) Tử thức của B :

$$\begin{aligned}\sin^4x + 3\cos^4x - 1 &= \sin^4x + \cos^4x + 2\cos^4x - 1\\ &= (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x + 2\cos^4x - 1\\ &= 2\cos^2x(\cos^2x - \sin^2x)\end{aligned}$$

Mẫu thức của B :

$$\begin{aligned}\sin^6x + \cos^6x + 3\cos^4x - 1 &= 1 - 3\sin^2x\cos^2x + 3\cos^4x - 1\\ &= 3\cos^2x(\cos^2x - \sin^2x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad B = \dfrac{2\cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{3\cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \dfrac{2}{3}$ không phụ thuộc x.

III. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Công thức cộng

$$cos(a - b) = cosacosb + sinxsinb \qquad (1)$$

$$cos(a + b) = cosacosb - sinasinb \qquad (2)$$

$$sin(a - b) = sinacosb - sinbcosa \qquad (3)$$

$$sin(a + b) = sinacosb + sinbcosa \qquad (4)$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b} \qquad (5)$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b} \qquad (6)$$

2. Công thức nhân đôi

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a \qquad (7)$$

$$\sin 2a=2\sin a\cos a \qquad (8)$$

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \qquad (9)$$

3. Công thức hạ bậc : $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$ (10)

$$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2} \qquad (11)$$

4. Công thức tính sina, cosa, tana theo tan $\frac{a}{2}$

Đặt $\tan\frac{a}{2}=t$ *ta có :* $\sin a=\dfrac{2t}{1+t^2}$ (12)

$$\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad (13)$$

$$\tan a=\frac{2t}{1-t^2} \qquad (14).$$

BÀI TẬP

207 Chứng minh các đẳng thức :

a) $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Giải

a) $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$$=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

b) $VT = 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left[\sin x.\cos x\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right] = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

208 Sử dụng các công thức cộng và các giá trị lượng giác của các góc (cung) đặc biệt để tìm các giá trị lượng giác của các góc (cung) 15°, 75°, 105°.

Giải

Ta có : $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 30^\circ\cos 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ\cos 30^\circ + \sin 45^\circ\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}, \quad \cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

Các giá trị lượng giác của các góc 75° và 105° được tính tương tự.

Ví dụ : $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$, $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$.

209 Không dùng bảng và máy tính hãy tìm giá trị của biểu thức

$$A = \sin\frac{\pi}{8} - 2\cos\frac{\pi}{8}.$$

Giải

Ta có : $1 - \cos\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sin^2\frac{\pi}{8}$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}; \quad \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} - \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

210 Cho $\sin x = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\tan\frac{x}{2}$.

Giải

Với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ nên $\cos x < 0$. $\cos x = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$

Ta lại có : $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\tan\frac{x}{2}$ dương

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}; \qquad \tan\frac{x}{2} = 3.$$

211 a) Cho biết $\tan(a+b) = m$, $\tan(a-b) = n$. Tính $\tan 2a$ và $\tan 2b$.

b) Tính $\tan 37^\circ 30'$ và $\tan 7^\circ 30'$.

Giải

a) $$\tan 2a = \tan[(a+b)+(a-b)] = \frac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{1-\tan(a+b)\tan(a-b)} = \frac{m+n}{1-mn}$$

$$\tan 2b = \tan[(a+b)-(a-b)] = \frac{\tan(a+b)-\tan(a-b)}{1+\tan(a+b)\tan(a-b)} = \frac{m-n}{1+mn}$$

b) $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, $\qquad 15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$

$\tan 45^\circ = 1$; $\qquad \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$$\tan 75^\circ = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2+\sqrt{3}; \qquad \tan 15^\circ = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2-\sqrt{3}$$

Đặt $t = \tan 37^\circ 30'$ thì $\tan 75^\circ = \frac{2t}{1-t^2} = 2+\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad (2+\sqrt{3})t^2 + 2t - (2+\sqrt{3}) = 0.$$

Do $\tan 37^\circ 30' > 0$ nên

ta có : $$\tan 37^\circ 30' = t_1 = \frac{-1+\sqrt{1+(2+\sqrt{3})^2}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}-1}{2+\sqrt{3}} \approx 0{,}7673$$

Thay $t = \tan 7^\circ 30'$ ta được :

$$\tan 15^\circ = \frac{2t}{1-t^2} = 2-\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad (2-\sqrt{3})t^2 + 2t - (2-\sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1}{2-\sqrt{3}}$$

$\tan 7^\circ 30' \approx 0{,}1317.$

212 Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{\cot 225^\circ - \cot 79^\circ \cot 71^\circ}{\cot 259^\circ + \cot 251^\circ}$.

Giải

$\cot 225^\circ = \cot(180^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$,

$\cot 79^\circ \cot 71^\circ = \tan 11^\circ \tan 19^\circ$

$\cot 259^\circ = \cot 79^\circ = \tan 11^\circ$,

$\cot 251^\circ = \cot 71^\circ = \tan 19^\circ$

$$\Rightarrow A = \frac{1 - \tan 11^\circ \tan 19^\circ}{\tan 11^\circ + \tan 19^\circ} = \frac{1}{\dfrac{\tan 11^\circ + \tan 19^\circ}{1 - \tan 11^\circ \tan 19^\circ}} = \frac{1}{\tan(11^\circ + 19^\circ)} = \frac{1}{\tan 30^\circ}$$

$= \cot 30^\circ = \sqrt{3}$.

213 Chứng minh đẳng thức :

$$(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 310^\circ + \cos 290^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ + \cos 380^\circ) = 1.$$

Giải

Ta có : $\cos 310^\circ = \cos(360^\circ - 50^\circ) = \cos(-50^\circ) = \cos 50^\circ$

$\cos 290^\circ = \cos(360^\circ - 70^\circ) = \cos 70^\circ$;

$\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$

$\cos 380^\circ = \cos(360^\circ + 20^\circ) = \cos 20^\circ$.

Suy ra $VT = (\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)^2 + (\sin 50^\circ - \sin 70^\circ)^2$

$= (\cos^2 70^\circ + \sin^2 70^\circ) + (\cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ) +$

$+ 2(\cos 70^\circ \cos 50^\circ - \sin 70^\circ \sin 50^\circ)$

$= 2 + 2\cos(50^\circ + 70^\circ) = 2 - 2.\dfrac{1}{2} = 1$ (đpcm).

214 Chứng minh đẳng thức :

$$(\sin 520^\circ + \sin 140^\circ)(\sin 40^\circ + \sin 20^\circ) + (\sin 130^\circ - \sin 70^\circ)(\sin 50^\circ - \sin 110^\circ) = 1.$$

Giải

Làm như bài 213 :

$VT = (\sin 20^\circ + \cos 40^\circ)^2 + (\cos 40^\circ - \sin 20^\circ)^2 = 2 - 2\cos 60^\circ = 1$.

215 Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x :

$$A = 4\cos^4 x - 2\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x.$$

Giải

$$A = (1 + \cos 2x)^2 - 2\cos 2x - \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) = \frac{3}{2}.$$

216 Cho biểu thức $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + a(\cos^4 x + \sin^4 x)$.

Với giá trị nào của a thì biểu thức không phụ thuộc giá trị của x.

Giải

$$f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + a(\cos^4 x + \sin^4 x)$$

$$= \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x - \frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2 + a(\cos^4 x + \sin^4 x)$$

$$= (a + 1)(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

f(x) không phụ thuộc x nếu $a = -1$.

217 Cho $\sin x = 2\sin(x + y)$. Chứng minh rằng : $\tan(x + y) = \frac{\sin y}{\cos y - 2}$.

Giải

Từ điều kiện $\sin x = 2\sin(x + y)$

suy ra $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (bởi vì nếu $x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì $|\sin x| = 2$ thì vô lí)

Với $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì $\cos(x + y) \neq 0$ và $\tan(x + y)$ xác định

Ta có : $\sin x = 2\sin(x + y)$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin(x + y) = \sin[(x + y) - y] = \sin(x + y)\cos y - \sin y\cos(x + y)$

$\Leftrightarrow \quad \sin y\cos(x + y) = \sin(x + y)\cos y - 2\sin(x + y) = \sin(x + y)[\cos y - 2]$

$\Leftrightarrow \quad \tan(x + y) = \frac{\sin y}{\cos y - 2}$ (đpcm).

218 Cho tam giác ABC không có góc nào vuông. Chứng minh :

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C \qquad (1)$

b) $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1 \qquad (2)$

Giải

a) Tacó : $\tan(A + B) = \tan(\pi - C) = -\tan C$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = -\tan C \quad \Rightarrow \quad (1)$$

b) $\cot(A + B) = \cot(\pi - C) = -\cot C$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\tan(A + B)} = -\frac{1}{\tan C} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1 - \tan A\tan B)\tan C}{\tan A + \tan B} = -1$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{\cot A}\cdot\frac{1}{\cot B}\right)\frac{1}{\cot C} = -\frac{1}{\cot A} - \frac{1}{\cot B}$$

$$\Rightarrow \quad \cot A\cot B - 1 = -\cot B\cot C - \cot A\cot C \quad \Rightarrow \quad (2).$$

219 Chứng minh rằng, trong tam giác ABC ta có hệ thức :

a) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$ (1)

b) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ (2)

Giải

a) Ta có : $\frac{A + B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \quad \tan\left(\frac{A + B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}} = \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} \quad \Rightarrow \quad (1).$$

b) Chứng minh tương tự a).

220 Chứng minh trong tam giác ABC ta có :

$$T = \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C \qquad (1)$$

Từ đó, suy ra T > 2 nếu A, B, C đều nhọn, T = 2 nếu ΔABC vuông và T < 2 nếu tam giác ABC có một góc tù.

Giải

$$T = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2C = 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2C$$

$$= 2 - \cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2C$$

Vì $\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$ nên ta có :

$$T = 2 + \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

Nếu A, B, C đều nhọn thì $\cos A\cos B\cos C > 0$ nên $T > 2$

Nếu ΔABC có một góc vuông thì $\cos A\cos B\cos C = 0$ nên $T = 2$

Nếu ΔABC có một góc tù thì $\cos A\cos B\cos C < 0$ nên $T < 2$.

CÔNG THỨC GÓC NHÂN BA

221 Chứng minh công thức nhân ba :

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ (1) ;

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ (2) ; $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$ (3)

Giải

a) $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha.\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$

$= 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

b) $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$

$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$

c) Chứng minh tương tự như trên.

222 Chứng minh các đẳng thức :

a) $\sin 3a\cos^3 a + \sin^3 a\cos 3a = \dfrac{3}{4}\sin 4a$ (1)

b) $\tan a\tan\left(\dfrac{\pi}{3} - a\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{3} + a\right) = \tan 3a$ (2)

Giải

a) Ta có : $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \Rightarrow \cos^3 a = \dfrac{1}{4}(\cos 3a + 3\cos a)$

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \Rightarrow \sin^3 a = \dfrac{1}{4}(3\sin a - \sin 3a)$

Thay vào vế trái (1) ta được :

$$\frac{1}{4}\sin 3a(\cos 3a + 3\cos a) + \frac{1}{4}(3\sin a - \sin 3a)\cos 3a =$$

$$= \frac{3}{4}(\sin 3a\cos a + \sin a\cos 3a) = \frac{3}{4}\sin(3a + a) = \frac{3}{4}\sin 4a.$$

b) $\text{VT} = \tan a.\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3} - \tan a}{1 + \tan\dfrac{\pi}{3}\tan a}.\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3} + \tan a}{1 - \tan\dfrac{\pi}{3}\tan a}$

$$= \tan a.\frac{\sqrt{3} - \tan a}{1 + \sqrt{3}\tan a}.\frac{\sqrt{3} + \tan a}{1 - \sqrt{3}\tan a} = \tan a.\frac{3 - \tan^2 a}{1 - 3\tan^2 a} = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

$= \tan 3a.$

223 Chứng minh các hệ thức :

a) $4\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\cos 3x$ (1)

b) $4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin 3x$ (2)

Giải

a) $VT = 4\cos x\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right]\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right]$

$$= 4\cos x\left[\left(\frac{1}{2}\cos x\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2\right] = 4\cos x\left[\frac{1}{4}\cos^2 x-\frac{3}{4}(1-\cos^2 x)\right]$$

$$= 4\cos^3 x-3\cos x=\cos 3x$$

b) $VT = 4\sin x\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)$

$$= 4\mathrm{snx}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sin x\right)^2\right] = 4\sin x\left[\frac{3}{4}(1-\sin^2 x)-\frac{1}{4}\sin^2 x\right]$$

$$= 3\sin x-4\sin^3 x=\sin 3x.$$

224 Không dùng bảng và máy tính. Hãy tìm các giá trị lượng giác của góc $\frac{\pi}{5}$.

Giải

Ta có :

$$\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\frac{2\pi}{5} \Rightarrow 3\sin\frac{\pi}{5}-4\sin^3\frac{\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$$

Bởi vì $\sin\frac{\pi}{5}\neq 0$ nên ta có thể chia hai vế đẳng thức trên cho $\sin\frac{\pi}{5}$ và được :

$$3-4\sin^2\frac{\pi}{5}=2\cos\frac{\pi}{5} \Rightarrow 3-4\left(1-\cos^2\frac{\pi}{5}\right)=2\cos\frac{\pi}{5}$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}-1=0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad \sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$\tan\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}.$$

225 Chứng minh đẳng thức :

$$\sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{a}{3^3} + \ldots + 3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n} = \frac{1}{4}\left[3^n\sin\frac{a}{3^n} - \sin a\right].$$

Giải

Ta có : $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \Rightarrow \quad \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

Thay x lần lượt bởi $\frac{a}{3}, \frac{a}{3^2}, \frac{a}{3^3}, \ldots, \frac{a}{3^n}$ ta được :

$$\sin^3\frac{a}{3} = \frac{1}{4}\left[3\sin\frac{a}{3} - \sin a\right]$$

$$3\sin^3\frac{a}{3^2} = \frac{1}{4}\left[3^2\sin\frac{a}{3^2} - 3\sin\frac{a}{3}\right]$$

$$3^2\sin^3\frac{a}{3^3} = \frac{1}{4}\left[3^3\sin\frac{a}{3^3} - 3^2\sin\frac{a}{3^2}\right]$$

. . . .

$$3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n} = \frac{1}{4}\left[3^n\sin\frac{a}{3^n} - 3^{n-1}\sin\frac{a}{3^{n-1}}\right]$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta suy ra đpcm.

CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

226 Chứng minh các công thức biến đổi tổng thành tích :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad (1)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \qquad (2)$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad (3)$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \qquad (4)$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b} \qquad (5)$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b} \qquad (6)$$

Giải

a) $$\cos a = \cos\left[\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right] = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \qquad (7)$$

$$\cos b = \cos\left[\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right] = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \qquad (8)$$

Cộng vế với vế (7) và (8) ta được (1).

Trừ vế với vế (7) và (8) thì được (2).

Biến đổi : $a = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}$, $b = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}$ ở vế trái (3) và (4)

Áp dụng công thức cộng ta được vế phải (3) và (4).

b) Ta có : $$\tan a \pm \tan b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a\cos b \pm \sin b\cos a}{\cos a\cos b} = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a\cos b}$$

Đó là các đẳng thức (5) và (6).

227 Chứng minh các đẳng thức :

a) $\sin(x + y)\sin(x - y) = \sin^2x - \sin^2y = \cos^2y - \cos^2x$

b) $\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A + B + C) = 4\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{C+A}{2}$

Giải

a) $$\begin{aligned} VT &= [\sin x\cos y + \sin y\cos x][\sin x\cos y - \sin y\cos x] \\ &= \sin^2x\cos^2y - \sin^2y\cos^2x = \sin^2x(1 - \sin^2y) - \sin^2y(1 - \sin^2x) \\ &= \sin^2x - \sin^2y = 1 - \cos^2x - (1 - \cos^2y) = \cos^2y - \cos^2x \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} VT &= (\sin A + \sin B) + (\sin C - \sin(A + B + C)) \\ &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{A+B+2C}{2}\sin\frac{-(A+B)}{2} \\ &= 2\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B+2C}{2}\right] \\ &= 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}. \end{aligned}$$

Trường hợp A, B, C là các góc của tam giác ABC thì $A + B + C = \pi$

$\sin(A + B + C) = 0$, $\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}$, $\dfrac{B+C}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}$, $\dfrac{C+A}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B}{2}$

ta được đẳng thức :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

228 Chứng minh đẳng thức :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2} - \cos(A+B+C) \qquad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \quad [\cos A + \cos B] + [\cos C + \cos(A+B+C)] =$$

$$= \quad 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C+A}{2} \qquad (2)$$

Biến đổi vế trái của (2) ta được :

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{A+B+2C}{2}\cos\frac{A+B}{2} =$$

$$= \quad 2\cos\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B+2C}{2}\right]$$

$$= \quad 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+C}{2}\cos\left(\frac{-B-C}{2}\right)$$

$$= \quad 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2} \text{ (đpcm).}$$

Nếu A, B, C là các góc của tam giác ABC thì

$$A + B + C = \pi, \qquad \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}, \qquad \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \qquad \frac{C+A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}.$$

Khi đó $\cos(A + B + C) = -1$ và hệ thức (1) trở thành :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

229 Cho A, B, C $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh đẳng thức :

$$\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C = \frac{\sin(A+B+C)}{\cos A\cos B\cos C} \qquad (1)$$

Giải

$$\sin(A+B+C) = \sin(A+B)\cos C + \sin C\cos(A+B)$$

$$= (\sin A\cos B + \cos A\sin B)\cos C + \sin C(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$$

$$= \sin A\cos B\cos C + \sin B\cos A\cos C + \sin C\cos A\cos B - \sin A\sin B\sin C$$

Vì A, B, C $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ nên $\cos A\cos B\cos C \neq 0$

Chia hai vế cho cosAcosBcosC, ta được :

$$\frac{\sin(A+B+C)}{\cos A\cos B\cos C} = \tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C \quad (1)$$

Nếu A, B, C là các góc của tam giác ABC không vuông thì

$$\sin(A + B + C) = \sin\pi = 0.$$

Và (1) trở thành : $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$.

230 Rút gọn biểu thức : $A = \dfrac{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x}{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x}$.

Giải

Tử thức $= (\cos x + \cos 4x) + (\cos 3x + \cos 2x)$

$$= 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{5x}{2}\left[\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right]$$

Mẫu thức $= (\sin 4x + \sin x) + (\sin 3x + \sin 2x)$

$$= 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin\frac{5x}{2}\left[\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right]$$

Từ đó suy ra : $A = \dfrac{\cos\frac{5x}{2}}{\sin\frac{5x}{2}} = \cot\dfrac{5x}{2}$.

231 Rút gọn biểu thức : $A = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos x}}}$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Giải

Ta có : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos x) = \cos^2\dfrac{x}{2}$

$$A = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}}. \qquad \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \cos\frac{x}{2} > 0 \text{ do } 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4}} = \cos\frac{x}{8}.$$

232 Rút gọn biểu thức : $A = \dfrac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2\cos^2 x + \cos x - 1}$.

Giải

Tử thức $= (1 + \cos 2x) + (\cos x + \cos 3x) = 2\cos^2 x + 2\cos x\cos 2x$

$$= 2\cos x(\cos x + \cos 2x) = 2\cos x(\cos x + 2\cos^2 x - 1)$$

Đáp số : $A = 2\cos x$.

233 Rút gọn biểu thức : $A = \dfrac{\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x}{\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x}$.

Giải

Tử thức = $\sin 5x + (\sin 4x + \sin 6x) = \sin 5x + 2\sin 5x\cos x = \sin 5x(1 + 2\cos x)$

Mẫu thức = $\cos 5x + (\cos 4x + \cos 6x) = \cos 5x + 2\cos 5x\cos x$

Đáp số : $A = \tan 5x$.

234 Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC. Chứng minh :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Giải

$$VT = (\cos A + \cos B) + \cos(\pi - (A + B)) = (\cos A + \cos B) - \cos(A + B)$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\cos^2\frac{A+B}{2}$$

$$= 1 + 2\cos\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 1 + 4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Vì $\cos\dfrac{A+B}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A+B}{2}\right) = \sin\dfrac{C}{2}$.

235 Rút gọn biểu thức : $A = \dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos 3x + \cos 5x} - \dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x}$

Giải

Dùng công thức biến đổi tổng thành tích ta được :

$$A = \frac{2\sin\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2}}{2\cos\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}} - \frac{2\sin\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2}}{2\cos\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2}}$$

$$= \tan x(\tan 4x - \tan 3x) = \tan x\frac{\sin x}{\cos 4x\cos 3x}.$$

CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

236 Chứng minh các công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)] \qquad (1)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \qquad (2)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)] \qquad (3)$$

Giải

Sử dụng công thức cộng cho cos(a – b), cos(a + b), sin(a + b), sin(a – b) ở vế phải của (1), (2), (3) ta được kết quả là vế trái các đẳng thức đó.

237 Chứng minh đẳng thức : $\dfrac{1}{\sin 10^0} - 4\sin 70^0 = 2.$

Giải

VT (vế trái) = $\dfrac{1 - 4\sin 10^0 \sin 70^0}{\sin 10^0}$

Sử dụng công thức biến tích thành tổng (1) ta có :

$$\frac{1 - 4\sin 10^0 \sin 70^0}{\sin 10^0} = \frac{1 - 2(\cos 60^0 - \cos 80^0)}{\sin 10^0}$$

$$= \frac{1 - 2(0,5 - \cos 80^0)}{\sin 10^0} = \frac{2\cos 80^0}{\sin 10^0} = 2.$$

238 Không dùng máy tính và bảng, tính giá trị của biểu thức :

a) $A = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$

b) $B = \cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{5\pi}{7}$.

Giải

a) Nhân A với $2\sin\dfrac{\pi}{7}$ ta được :

$$2A\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$= \left[\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right] + \left[\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right] + \left[\sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}\right] = -\sin\frac{\pi}{7}$$

$$\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}.$$

b) Làm tương tự câu a) ta được $B = \dfrac{1}{2}$.

Ta cũng có thể dùng tính chất của góc bù để viết

$$B = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = -\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{7}\right)\right]$$

$$= -\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)$$ Rồi áp dụng kết quả câu a).

239 Cho biểu thức :

$$S = \sin x + \sin(x + y) + \sin(x + 2y) + \sin(x + 3y) + \sin(x + 4y)$$

Tìm $y \in (0; \pi)$ sao cho S không phụ thuộc vào giá trị của x.

Giải

Nhân S với $2\sin\frac{y}{2}$

$$2S\sin\frac{y}{2} = 2\sin\frac{y}{2}\sin x + 2\sin\frac{y}{2}\sin(x + y) + \ldots + 2\sin\frac{y}{2}\sin(x + 4y)$$

$$= \left[\cos\left(x - \frac{y}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{y}{2}\right)\right] + \left[\cos\left(x + \frac{y}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{3y}{2}\right)\right] +$$

$$+ \ldots + \left[\cos\left(x + \frac{7y}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{9y}{2}\right)\right]$$

$$= \cos\left(x - \frac{y}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{9y}{2}\right) = 2\sin\frac{5y}{2}\sin(x + 2y)$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{\sin\frac{5y}{2}\sin(x + 2y)}{\sin\frac{y}{2}}$$

Từ điều kiện $0 < y < \pi$. Suy ra $\sin\frac{y}{2} \neq 0$. Để S không phụ thuộc vào x ta tìm y sao cho $\sin\frac{5y}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5y}{2} = k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow y = k\frac{2\pi}{5}$

$$0 < k\frac{2\pi}{5} < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{2k}{5} < 1 \Leftrightarrow k = 1, 2$$

Vậy, nếu $y = \frac{2\pi}{5}$ hoặc $y = \frac{4\pi}{5}$ thì S không phụ thuộc x.

240 Chứng minh đẳng thức :

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \qquad (1)$$

Giải

Nhân vế trái với $2\sin\frac{x}{2}$ ta được :

$$2S\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 2x + 2\sin\frac{x}{2}\sin 3x + \dots + 2\sin\frac{x}{2}\sin nx$$

$$= \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \left(\cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2}\right) +$$

$$+ \dots + \left[\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$= \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x = 2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}$$

$$S = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \quad \text{(đpcm).}$$

BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

241 Chứng minh : Nếu $0 < x < \frac{\pi}{4}$ thì $\sin x < \cos x$.

Nếu $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x > \cos x$.

Giải

Ta có : $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\sin x.\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Nếu $0 < x < \frac{\pi}{4}$ thì $-\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < 0$ và $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

Do đó : $\sin x - \cos x < 0 \Leftrightarrow \sin x < \cos x$

Nếu $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ thì $0 < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$ và $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

Do đó $\sin x > \cos x$.

242 Chứng minh : **a)** $\frac{\sin x + \sin y}{2} \le \sin\frac{x+y}{2}$ với $0 \le x + y \le 2\pi$

b) $\frac{\cos x + \cos y}{2} \le \cos\frac{x+y}{2}$ với $-\pi < x + y < \pi$.

Giải

a) Ta có : $0 \le x + y \le 2\pi \;\Rightarrow\; 0 \le \frac{x+y}{2} \le \pi \;\Rightarrow\; \sin\frac{x+y}{2} \ge 0$

$$\cos\frac{x-y}{2} \le 1 \;\Rightarrow\; \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \le \sin\frac{x+y}{2}$$

$$\Rightarrow\; \frac{\sin x + \sin y}{2} \le \sin\frac{x+y}{2}$$

b) Chứng minh tương tự câu a).

$\boxed{\textbf{243}}$ Cho $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh : $\tan\frac{x+y}{2} \le \frac{\tan x + \tan y}{2}$.

Giải

Ta có : $\tan\frac{x+y}{2} = \dfrac{\sin\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{2\cos^2\frac{x+y}{2}} = \dfrac{\sin(x+y)}{1+\cos(x+y)}$

$$= \frac{\sin(x+y)}{1 + \cos x\cos y - \sin x\sin y}$$

Vì $\cos(x - y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y \le 1$

$\Rightarrow$ $\cos x\cos y \le 1 - \sin x\sin y \le 1$

$\Rightarrow$ $2\cos x\cos y \le 1 + \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\Rightarrow$ $\tan\frac{x+y}{2} = \dfrac{\sin(x+y)}{1+\cos(x+y)} \le \dfrac{\sin(x+y)}{2\cos x\cos y} = \dfrac{\tan x + \tan y}{2}$.

$\boxed{\textbf{244}}$ Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC. Chứng minh :

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}.$$

Giải

Theo bất đẳng thức Côsi ta có : $\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} \ge 2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$

$$\tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} \ge 2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\tan^2\frac{C}{2} + \tan^2\frac{C}{2} \ge 2\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow\; \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} \ge \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

$$\Rightarrow\ 3 \leq \tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ 3 \leq \left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2 \ \Rightarrow\ \text{(đpcm).}$$

245 Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC. Chứng minh :

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Giải

Theo kết quả bài 242 ta có : $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2} \leq 2\sin\frac{A+B}{4}$

$$\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{\pi}{6} \leq 2\sin\frac{\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{\pi}{6} \leq 2\left[\sin\frac{A+B}{4}+\sin\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$\leq 4\sin\frac{1}{2}\left(\frac{A+B+C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{A+B}{4}-\frac{C}{4}-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\leq 4\sin\left(\frac{A+B+C}{8}+\frac{\pi}{24}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{24}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$$

$$\Rightarrow\quad \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \leq 2-\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$

246 Cho x, y, z > 0, $x + y + z = \pi$.

Chứng minh : $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Giải

Từ giả thiết, cho thấy x, y, z là 3 góc của một tam giác.

Từ kết quả bài 245, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương, ta có :

$$\frac{1}{2} \geq \frac{\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{y}{2}+\sin\frac{z}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{8} \geq \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2} \qquad \text{(đpcm).}$$

247 Chứng minh tam giác ABC có hệ thức : $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ (1)

thì tam giác ABC vuông ở A.

Giải

$$VP = \frac{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}{2\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}} = \frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\cos\dfrac{B+C}{2}}$$

$$(1) \Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$$

(Vì $0 < A, B, C < \pi$, suy ra $0 < \dfrac{B+C}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{B-C}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \dfrac{A}{2} < \dfrac{\pi}{2}$,

nên $\cos\dfrac{B+C}{2} = \sin\dfrac{A}{2} \neq 0, \cos\dfrac{A}{2} \neq 0$)

$$\Rightarrow \quad 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \cos A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{2}.$$

248 Chứng minh rằng, nếu trong tam giác ABC

$$\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C \qquad (1)$$

thì ABC là tam giác vuông.

Giải

Theo bài 227.

$$VT = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$VP = 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right] = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2} \qquad \left(\text{vì } \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \neq 0\right)$$

$\Rightarrow \tan\dfrac{A}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{A}{2} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{2}$. Vậy, tam giác ABC vuông tại A.

249 Chứng minh rằng nếu $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \dfrac{1}{2}(\tan A + \tan B)$ (1)

thì tam giác ABC cân.

Giải

$$VT = \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}};\qquad VP = \frac{\sin(A+B)}{2\cos A\cos B} = \frac{\sin C}{\cos(A+B) + \cos(A-B)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos C + \cos(A-B)}$$

$$\Rightarrow 1 - \cos C = -\cos C + \cos(A-B)$$

$$\Rightarrow \cos(A-B) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad A = B$$

250 Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là có hệ thức

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - (\cot A + \cot B + \cot C) = \sqrt{3} \qquad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{\sin A} + \frac{1-\cos B}{\sin B} + \frac{1-\cos C}{\sin C} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} + 2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right) = 3 \ (2)$$

Theo kết quả bài 219

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$ từ (2) suy ra

$$1 = \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} - \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\tan\frac{B}{2} - \tan\frac{C}{2}\right)^2 + \left(\tan\frac{C}{2} - \tan\frac{A}{2}\right)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2} = \tan\frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

PHẦN HÌNH HỌC

Chương 1

VECTƠ

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Định nghĩa

- *Vectơ là một đoạn thẳng định hướng;*
- *Một vectơ được xác định bởi :*
    - + *Phương : Hai vectơ cùng phương khi chúng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.*
    - + *Hướng : Hai vectơ cùng phương thì có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Ta chỉ xét đến hướng của hai vectơ khi chúng cùng phương.*
    - + *Độ dài của vectơ là độ dài đoạn thẳng xác định bởi điểm đầu và điểm cuối của vectơ.*
- *Vectơ-không $\vec{0}$ là vectơ có phương và hướng tùy ý và có độ dài bằng 0.*

2. Vectơ bằng nhau

*Hai vectơ bằng nhau **khi và chỉ khi** chúng **cùng hướng** và có **độ dài bằng nhau***

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CD} \text{ cùng hướng;} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$$

II. VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN

1. Tổng của hai vectơ

a) Quy tắc tam giác (quy tắc 3 điểm)

Với ba điểm A, B, C ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Quy tắc 3 điểm cũng gọi là hệ thức Chasles dùng để cộng các vectơ liên tiếp, có thể mở rộng cho trường hợp nhiều vectơ.

b) Quy tắc hình bình hành

Cho ABCD là hình bình hành thì : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Quy tắc hình bình hành dùng để cộng các vectơ chung gốc.

c) Tính chất : *Tổng vectơ có các tính chất :*

+ *Giao hoán* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

+ *Kết hợp* $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

+ *Tính chất của vectơ không :* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

2. Hiệu của hai vectơ

a) Vectơ đối : *Hai vectơ đối nhau là hai vectơ ngược hướng và có cùng độ dài.*

Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ *kí hiệu là* $-\vec{a}$

Tổng của hai vectơ đối là vectơ $\vec{0}$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

b) Quy tắc tam giác đối với hiệu vectơ

Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$

3. Tích của một số với một vectơ

a) Định nghĩa : *Cho một số thực* $k \neq 0$ *và một vectơ* $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Tích $k\vec{a}$ *là một vectơ có :* $k\vec{a}$ *cùng hướng với* $\vec{a}$ *nếu* $k > 0$

$k\vec{a}$ *ngược hướng với* $\vec{a}$ *nếu* $k < 0$

$$|k\vec{a}| = |k|.|\vec{a}|$$

b) Tích của một số với một vectơ *có các tính chất :*

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

$$(k + h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}$$

$$k(h\vec{a}) = (k.h)\vec{a}$$

$$1.\vec{a} = \vec{a}; \quad (-1).\vec{a} = -\vec{a}; \quad 0.\vec{a} = \vec{0}; \quad k.\vec{0} = \vec{0}.$$

c) Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) *cùng phương là có một số k để* $\vec{a} = k.\vec{b}$.

4. Trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

a) Trung điểm của đoạn thẳng

I là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \vec{IA}+\vec{IB}=\vec{0}$

I là trung điểm của AB và M là điểm bất kì $\Leftrightarrow 2\vec{MI}=\vec{MA}+\vec{MB}$.

b) Trọng tâm của tam giác

G là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

G là trọng tâm của ΔABC *và M là điểm bất kì* $\Leftrightarrow 3\vec{MG}=\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}$

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

1. Chứng minh hai vectơ cùng phương

Để chứng minh hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ *cùng phương, ta chứng minh hệ thức :*

$$\vec{a}=k.\vec{b}.$$

2. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng

Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh hai vectơ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ *cùng phương*

$$\vec{AB}=k.\vec{AC}$$

3. Chứng minh hai đường thẳng song song

Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD song song, ta chứng minh hai vectơ $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ *cùng phương.*

4. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, AB = CD, ta chứng minh $\vec{AB}=\vec{CD}$.

5. Chứng minh trung điểm của đoạn thẳng

Để chứng minh điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta chứng minh một trong các hệ thức sau :

+ $\vec{IA}=\vec{BI}$

+ $\vec{IA}+\vec{IB}=\vec{0}$

+ $2\vec{AI}=\vec{AB}$

+ *Với một điểm O bất kì trong mặt phẳng thì :* $2\vec{OI}=\vec{OA}+\vec{OB}$

6. Chứng minh trọng tâm của tam giác

Để chứng minh điểm G là trọng tâm của ΔABC, ta chứng minh một trong các hệ thức :

+ $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

+ *Với điểm I là trung điểm của cạnh BC thì* $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI}$

+ *Với O là điểm bất kì trong mặt phẳng thì* $3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

7. Chứng minh ba điểm không thẳng hàng

Để chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng hay A, B, C là ba đỉnh của một tam giác, ta chứng minh hai vectơ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ *không cùng phương.*

8. Chứng minh hình bình hành

Để chứng minh tứ giác ABCD là hình bình hành, ta chứng minh hệ thức $\vec{AB} = \vec{DC}$

$$\vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}$$

9. Chứng minh hệ thức vectơ

Để chứng minh một hệ thức vectơ, ta thường xuất phát từ một vế (thường là xuất phát từ vế phức tạp hơn). Sử dụng các phép toán và các tính chất (giao hoán, kết hợp ...) và các quy tắc (quy tắc tam giác, quy tắc hình bình hành ...) để đi đến vế kia. Đôi khi ta cũng xuất phát từ cả hai vế hoặc xuất phát từ một hệ thức đã biết.

- *Để xác định điểm M thỏa mãn một hệ thức vectơ, ta tìm một điểm cố định O đã biết và tìm cách biểu diễn vectơ* $\vec{OM}$ *theo các vectơ có mặt trong giả thiết.*

CÁC CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

251 Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai ?

a) Hai vectơ đối nhau thì cùng phương.

b) Hai vectơ bằng nhau thì cùng phương.

c) Hai vectơ cùng phương thì đối nhau.

d) Hai vectơ cùng phương thì bằng nhau.

e) Hai vectơ bằng nhau thì có cùng độ dài.

f) Hai vectơ có cùng độ dài thì bằng nhau.

Hướng dẫn

a, b, e : đúng – c, d, f : sai.

252 Cho hình bình hành ACDB. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng :

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **b)** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **c)** $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$.

Hướng dẫn

c) đúng.

253 Tứ giác ABCD với $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là sai :

a) ABCD là hình bình hành. **b)** BCDA là hình bình hành.

c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

Hướng dẫn

c) Sai.

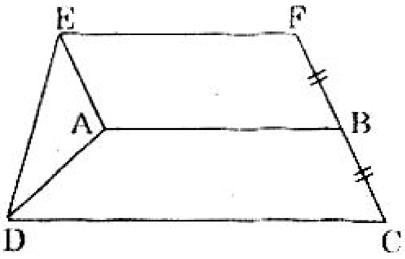
254 Cho hình vẽ bên với EF // AB // DC. Hãy tìm :

a) Hai vectơ bằng nhau.

b) Hai vectơ đối nhau.

c) Hai vectơ cùng phương không bằng nhau và cũng không đối nhau.

d) Hai vectơ không cùng phương.



Hướng dẫn

Bạn đọc căn cứ vào SGK để trả lời.

255 Cho bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng với

5 hệ thức vectơ	và	5 mệnh đề
1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$		A : ABCD là hình bình hành
2. $\overrightarrow{AB} = -3\,\overrightarrow{AC}$		B : ABDC là hình bình hành
3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$		C : D là trung điểm của AB
4. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$		D : ACBD là hình bình hành
5. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$		E : $C \in AB$

Hãy nối các mệnh đề với các hệ thức để có được một kết luận đúng.

Hướng dẫn

1 – C; 2 – E; 3 – B; 4 – D; 5 – A.

256 Cho tam giác ABC.

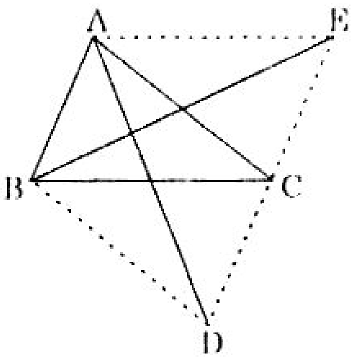
a) Xác định các điểm D và E sao cho các hệ thức sau được thỏa mãn

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

b) Chứng minh điểm C là trung điểm của đoạn thẳng ED.

Hướng dẫn

a) Dựng hình bình hành ABDC



Theo quy tắc hình bình hành, ta có :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Dựng hình bình hành ABCE, tương tự, ta có

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

b) Tứ giác ABDC là hình bình hành, cho ta

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}) + 2\,\overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad 2\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE}$$

Đẳng thức này chứng tỏ C là trung điểm của DE.

257 Cho hình bình hành ABCD.

a) Xác định các điểm M, P sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB}$

b) Chứng minh điểm B là trung điểm của đoạn thẳng DP.

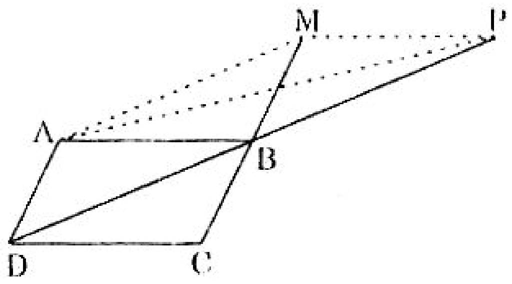
Hướng dẫn

a) Dựng hình bình hành ADBM

Dựng hình bình hành ABPM

b) Ta có $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} \qquad (1)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \qquad (2)$



ABDM là hình bình hành, cho ta

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MB} \qquad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra : $2\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP}$ $\Rightarrow$ B là trung điểm của DP.

258 Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ AD và BC có cùng trung điểm.

Hướng dẫn

Ta chứng minh hai mệnh đề :

a) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì hai đoạn thẳng AD, BC có cùng trung điểm I. Giả sử I là trung điểm của đoạn thẳng AD :

Theo hệ thức Chasles, ta có : $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}$

Vì I là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{DI}$

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Suy ra $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CI}$

$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CI} \Rightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$

hệ thức này chứng tỏ I là trung điểm của đoạn thẳng BC.

b) Nếu AD và BC có cùng trung điểm, thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Ta có : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$

$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IB} \Rightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{ID} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

259 Cho O, A, B, C là bốn điểm bất kì trong mặt phẳng.

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

a) Dựng các điểm D; E; F sao cho :

$\overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$; $\overrightarrow{OE} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$; $\overrightarrow{OF} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

b) Chứng minh rằng A là trung điểm của đoạn thẳng DE và C là trung điểm của đoạn thẳng FD.

c) Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Hướng dẫn

a) Trước hết dựng hình bình hành OAMB ta được $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{u} + \vec{v}$

Dựng hình bình hành OCMD ta được : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

⇒ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}$ ⇒ $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OC}$ hay $\overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

Các điểm E, F dựng tương tự.

b) Ta có $\overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

$\overrightarrow{OE} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 2\vec{u}$ ⇒ $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$

Đẳng thức này chứng tỏ A là trung điểm của đoạn thẳng DE.

Trường hợp điểm C cũng chứng minh tương tự.

c) Dễ thấy $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Suy ra đpcm.

$\boxed{260}$ Cho hai điểm A, B.

a) Dựng các điểm E, F sao cho : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

b) Chứng minh hai đoạn thẳng AB và EF có cùng trung điểm.

Hướng dẫn

a) E và F thuộc đoạn thẳng AB và có độ dài $AE = \frac{2}{5}AB$, $AF = \frac{3}{5}AB$

b) Ta gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI}$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI}$$

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{FI}$$

$$2\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{FI} \qquad (1)$$

Vì I là trung điểm của AB nên $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$

Mặt khác $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

Đẳng thức (1) trở thành :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{FI}) \Rightarrow \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{FI} = \vec{0} \qquad (2)$$

Đẳng thức (2) chứng tỏ I là trung điểm của EF.

261 Cho tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng với mọi điểm M trong mặt phẳng, ta có :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$$

b) Dựng điểm D sao cho : $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn

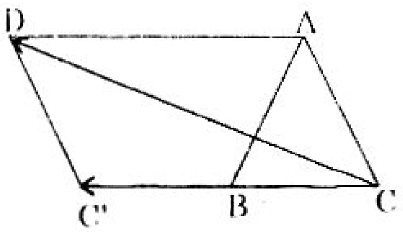
a) Thế $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}$ vào vế trái, ta suy ra đpcm.

b) Trước hết, dựng vectơ $\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{CB}$

Dựng hình bình hành ACC'D

Ta có : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

D là điểm cần dựng.



262 Cho tam giác ABC.

a) Dựng điểm P thỏa mãn hệ thức : $3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

b) Chứng minh rằng, vectơ $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trong mặt phẳng.

Hướng dẫn

a) Thế $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}$ vào vế trái và rút gọn, ta được :

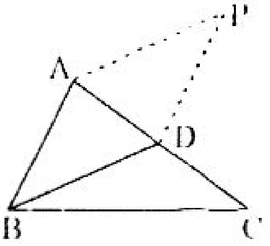
$$2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow 2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \quad (1)$$

Gọi D là trung điểm cạnh AC thì : $2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BD}$

P là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABDP.



b) Ta có $\vec{v} = 3(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + 2(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})$

vì $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BC}$

Vậy $\vec{v} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$

Do đó $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trong mặt phẳng.

263 Cho bốn điểm A, B, C, D

a) Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

b) M, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD.

Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{MN}$

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$

Cộng vế với vế và chú ý $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$, suy ra đpcm.

b) Áp dụng công thức trung điểm để có $2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ (1)

$2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ (2)

và $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra đpcm.

c) - Từ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

- Ngược lại, từ

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

264 Cho bốn điểm A, B, C, D. Gọi M, N theo thứ tự là các trung điểm của đoạn thẳng BC, CD.

Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{DA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$.

Hướng dẫn

Do $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NM}$; $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$

vế trái đẳng thức cần chứng minh là $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{NM}$

Dễ thấy $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \Rightarrow$ suy ra đpcm.

265 Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy các điểm D, E, F sao cho

$$BD = DE = EF = FC$$

Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} = 5\,\overrightarrow{AE}$.

Hướng dẫn

Áp dụng công thức trung điểm : $2\,\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$2\,\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$$

266 Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh hệ thức :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}.$$

Hướng dẫn

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$$

Kết hợp với $\quad \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{0}$

suy ra $\quad \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$

Phần còn lại chứng minh tương tự.

267 Cho tứ giác ABCD, có AB không song song với CD; M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC, AC, DB.

a) Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$; $\quad \overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$

b) Các điểm M, N, P, Q là đỉnh của một hình bình hành.

c) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN và P là một điểm bất kì.

Chứng minh các hệ thức : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\,\overrightarrow{PI}.$$

Hướng dẫn

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (1) \qquad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \quad (2)$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0} \quad (3) \quad$ và $\quad \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{0} \quad (4)$

(1), (2), (3), (4) suy ra đpcm.

Từ $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MP}$

Suy ra $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$

b) Dễ thấy $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN}$

c) Ta có $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$; $2\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{0}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0} \qquad (*)$

Ta lại có :

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{ID}$

Kết hợp với kết quả (*) suy ra đpcm.

268 Cho tam giác ABC với hai đường trung tuyến BN, CP.

Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

Hướng dẫn

$\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$; $\qquad \overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CP}$

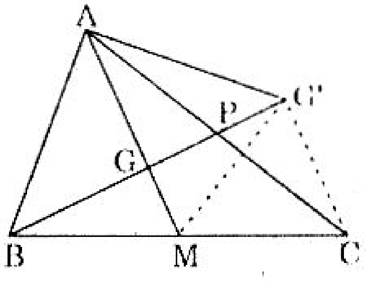
$\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$.

269 Cho tam giác ABC, trọng tâm G và các đường trung tuyến AM, BP. Gọi G' là điểm đối xứng với điểm G qua điểm P.

a) Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AG'}$, $\overrightarrow{CG'}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$.

Hướng dẫn



a) $\overrightarrow{AG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CG'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Ta có : $\overrightarrow{MG'} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CG'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

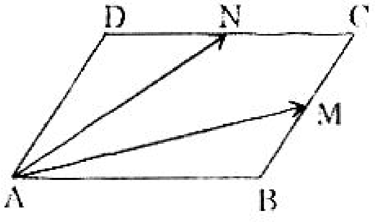
Kết hợp với $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{MG'} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ đpcm.

270 Cho hình bình hành ABCD; M và N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$.

Hướng dẫn

$$\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{CD} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$$



271 Cho tứ giác ABCD; M và N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$.

Hướng dẫn

Sử dụng công thức trung điểm và hệ thức Chasles, ta được :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\,; \qquad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$$

272 Cho ΔABC và D là điểm thỏa mãn hệ thức $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ rồi vẽ điểm D.

b) Xác định điểm E thỏa mãn hệ thức : $\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$.

Hướng dẫn

a) Từ hệ thức đã cho, áp dụng quy tắc ba điểm, ta được :

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$$

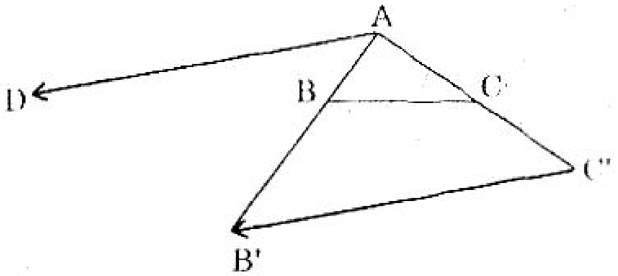
và được hình vẽ bên với $\overrightarrow{AB'} = 3\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C'B'}$

Ta có : $\overrightarrow{AB'} = 3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AC'}$

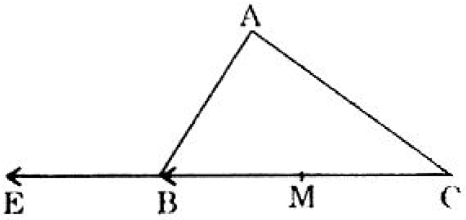
$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{C'B'} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$



Từ $\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{EC} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2(\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC}) = \vec{0}$ (*)

b) Gọi M là trung điểm của AB, theo công thức trung điểm thì :

$$2\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}$$



- Mặt khác $\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CB}$

Hệ thức đã cho trở thành

$$2\overrightarrow{EM} + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{CB}$$

E nằm trên đường thẳng BC và có EM = CB.

$\boxed{\textbf{273}}$ Cho hình bình hành ABCD, tâm O; M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$.

a) Chứng minh hệ thức : $3\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.

b) Chứng minh ba điểm B, P, N thẳng hàng.

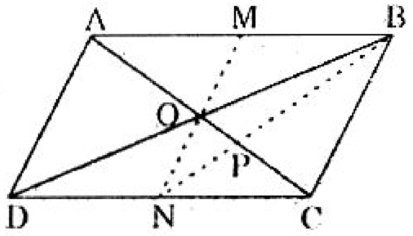
c) Chứng minh ba đường thẳng AC, BD và MN đồng quy.

Hướng dẫn

a) Ta có : $3\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA} \quad \Rightarrow \quad 3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}) = -\overrightarrow{OA}$

$$\Rightarrow \quad 4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{0} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \qquad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

b) Ta có : $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra : $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} \quad \Rightarrow \quad$ Suy ra đpcm.

c) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}; \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{0}$

$\Rightarrow$ Suy ra đpcm.

274 Cho tam giác ABC; M là trung điểm của cạnh AB và D, E, F theo thứ tự được xác định bởi các hệ thức : $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}\ ; \qquad 5\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

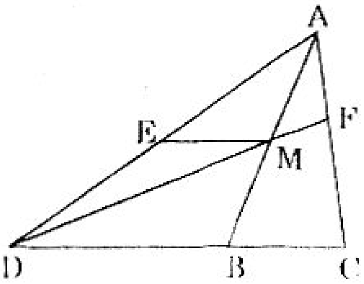
a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh EM // BC.

c) Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

d) Chứng minh ba đường thẳng AD, BC, MF đồng quy.

Hướng dẫn



a) $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

b) Từ hệ thức : $\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

Mặt khác $\quad \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EM}$

Suy ra $\quad 2\overrightarrow{EM} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ suy ra EM // BC.

c) Hãy chứng minh $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE}$

d) Ta tính được $\quad 5\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{AC} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AM} \qquad (1)$

$$5\overrightarrow{DF} = 6\left(2\overrightarrow{AC} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AM}\right) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{DF} = 6\overrightarrow{MF} \quad \Rightarrow$ ba điểm D, M, F thẳng hàng

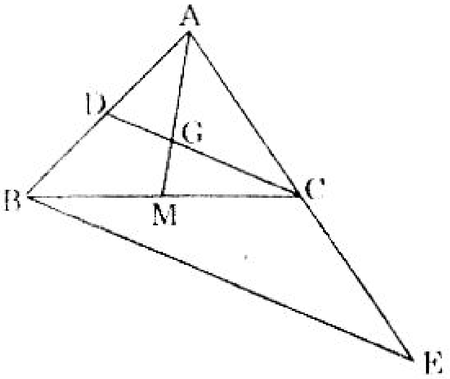
$\Rightarrow$ suy ra đpcm.

275 Cho tam giác ABC, các điểm D, E, G được xác định bởi hệ thức :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ; \qquad \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CE}\ ; \qquad 2\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

a) Chứng minh BE // CD.

b) M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh A, G, M thẳng hang.



Hướng dẫn

a) Dễ thấy D là trung điểm của AB; G là trọng tâm của ΔABC; C là trung điểm của đoạn thẳng AE.

Ta có : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$.

Từ $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CE}$ ta được $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CE}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE} \quad \Rightarrow \quad \text{C là trung điểm của AE}$$

và ta có $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$, do đó $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$ (1)

Từ $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \quad BE \,//\, CD$.

b) Từ $2\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Vì $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$ nên ta có $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad 3\overrightarrow{GA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

M là trung điểm của BC nên $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, do đó

$$3\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{AM} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA}.$$

Hai vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{MA}$ cùng phương, suy ra ba điểm A, M, G thẳng hàng.

276 Cho hình bình hành ABCD và hai điểm E, F thỏa mãn các hệ thức

$$\overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} = \vec{0}; \qquad \overrightarrow{DF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \vec{0}$$

a) Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.

b) Xác định vị trí điểm M để hệ thức sau đây được thỏa mãn

$$2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AF} = \vec{0}.$$

Hướng dẫn

a) Ta tính được : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD})$$

Suy ra $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ $\Rightarrow$ suy ra đpcm.

b) Ta có : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME})$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{ME} = \vec{0}$

M là trung điểm của CD.

$\boxed{\textbf{277}}$ Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và P, Q là hai điểm được xác định bởi các hệ thức : $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} - 2\,\overrightarrow{AB}$ (1)

$$\overrightarrow{CQ} = k\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \qquad (2)$$

trong đó k là một số thực.

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Xác định giá trị k để ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

c) Xác định giá trị k để đường thẳng PQ đi qua điểm M.

Hướng dẫn

a) Ta có, theo (1) thì :

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = -2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Theo (2) thì :

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AQ} = k\,\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \quad \overrightarrow{AQ} = k\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$$

b) Để A, P, Q thẳng hàng thì vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AQ}$ phải cùng phương

Ta có : $\overrightarrow{AP} = -2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$-2\,\overrightarrow{AQ} = -2\,\overrightarrow{AB} - 2k.\,\overrightarrow{AC}$$

Để $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AQ}$ ta phải có $-2k = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

Với $k = -\frac{1}{2}$ thì $\overrightarrow{AP} = -2\,\overrightarrow{AQ}$ $\Rightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{AQ}$ cùng phương.

c) Để đường thẳng PQ đi qua M, ta tìm điều kiện để hai vectơ $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{MQ}$ cùng phương (ba điểm M, P, Q thẳng hàng)

Từ $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = -2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

Vì M là trung điểm của BC nên $-\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$, do đó ta có :

$$\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}$$

Tương tự, ta tính được $\overrightarrow{MQ} = -k\,\overrightarrow{MA} + (k-1)\,\overrightarrow{MC}$

Để $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{MQ}$ cùng phương thì : $\dfrac{-k}{2} = \dfrac{k-1}{3} \Rightarrow k = \dfrac{2}{5}$.

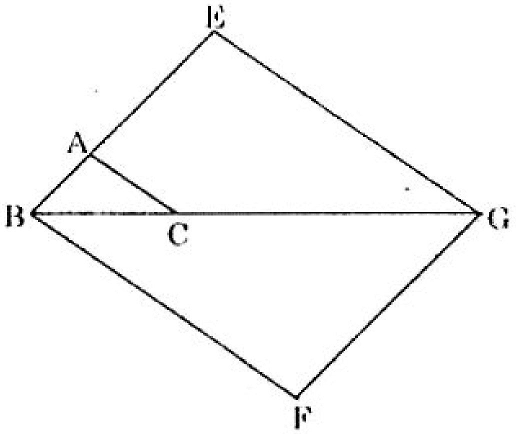
278 Cho tam giác ABC.

a) Dựng các điểm E, F, G thỏa mãn các đẳng thức :

$$\overrightarrow{BE} = -3\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}$$

b) Chứng minh điểm G nằm trên đường thẳng BC.

Hướng dẫn



a) Xem hình vẽ.

b) Ta có : $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}$

$$\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BC}$$

$\Rightarrow$ ba điểm B, C, G thẳng hàng.

279 Cho tam giác ABC.

a) Dựng các điểm E, F, M, N thỏa mãn các đẳng thức

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{FN} = 4\overrightarrow{BC}$$

b) Các điểm A, M, N có thẳng hàng không ? Tại sao ?

Hướng dẫn

b) Ta có : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AN} \quad \Rightarrow$ suy ra đpcm.

280 Cho tam giác ABC và hai điểm I, F xác định bởi các hệ thức :

$$\overrightarrow{IA} + 3\,\overrightarrow{IC} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{FA} + 2\,\overrightarrow{FB} + 3\,\overrightarrow{FC} = \vec{0} \qquad (2)$$

Chứng minh ba điểm I, F, B thẳng hàng.

Hướng dẫn

Từ (2) $\Rightarrow \quad \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IA} + 2\,\overrightarrow{FB} + 3(\overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad 2\,\overrightarrow{FB} + 4\,\overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IA} + 3\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

vì theo (1) $\Rightarrow \quad \overrightarrow{IA} + 3\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ nên $\quad 2\,\overrightarrow{FB} + 4\,\overrightarrow{FI} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{FB} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{FI}$

$\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{FI}$ cùng phương $\Rightarrow$ F, B, I thẳng hàng.

281 Cho tam giác ABC.

a) Dựng các điểm E và D sao cho :

$$\overrightarrow{BE} = 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}; \qquad 5\,\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}$$

b) Chứng minh các điểm A, D, E thẳng hàng.

Hướng dẫn

b) Ta có : $\quad 5\,\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \quad 5\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}$ mà $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow \quad 5\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad 5\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \quad \Rightarrow$ đpcm.

282 Cho tam giác EDF.

a) Dựng điểm H sao cho : $\overrightarrow{EH} = 4\,\overrightarrow{ED} - 3\,\overrightarrow{EF}$

b) Chứng minh điểm H nằm trên DF.

Hướng dẫn

b) Ta có : $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DH} = 4\,\overrightarrow{ED} - 3\,\overrightarrow{EF} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{DH} = 3(\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EF})$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{DH} = 3\,\overrightarrow{FD} \quad \Rightarrow$ suy ra đpcm.

283 Cho tam giác ABC có I là trung điểm của trung tuyến AM và D là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BI}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh ba điểm B, I, D thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (1)

$$2\,\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \qquad (2)$$

b) Từ (1) và (2) suy ra : $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} \Rightarrow$ suy ra đpcm.

284 Cho hình bình hành ABCD.

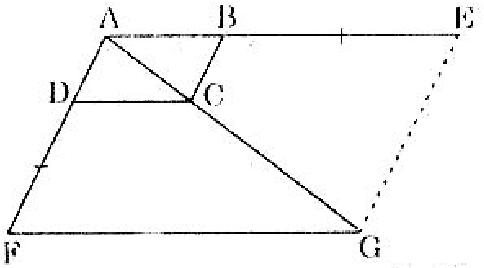
a) Dựng các điểm E, F sao cho : $\overrightarrow{BE} = 2\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AF} = 3\,\overrightarrow{AD}$

b) Dựng điểm G sao cho tứ giác AEGF là hình bình hành.

c) Chứng tỏ ba điểm A, C, G thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) và **b)** Xem hình vẽ.



c) Ta có, AEGF là hình bình hành, cho ta

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$$

Dễ thấy $\overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AF} = 3\,\overrightarrow{AD}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AG} = 3\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AD} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AG} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

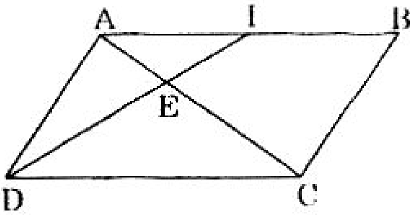
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AG} = 3\,\overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad \text{suy ra đpcm.}$$

285 Cho hình bình hành ABCD; I là trung điểm của AB và E là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$. Chứng minh ba điểm A, E, C thẳng hàng.

Hướng dẫn

Ta có : $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD})$



$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \qquad (1)$

I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow$ suy ra đpcm.

286 Cho tam giác ABC.

a) Dựng các điểm I, E, F sao cho : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$; $3\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA}$

b) Chứng minh ba điểm F, I, E thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Độc giả dựng.

b) Từ các hệ thức đã cho ta tính được :

$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\quad \overrightarrow{IE} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{IF} = -3\overrightarrow{IE} \quad \Rightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{IF}$, $\overrightarrow{IE}$ cùng phương

$\Rightarrow$ ba điểm F, I, E thẳng hàng.

287 Cho tam giác ABC.

a) Dựng các điểm K, L sao cho

$$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}; \quad 2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$$

b) Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Độc giả dựng.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

288 Cho tam giác ABC; M là trung điểm của cạnh AB; N và P là hai điểm thỏa mãn hệ thức : $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$; $\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$

Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Hướng dẫn

Biểu diễn $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ta có :

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$ $\Rightarrow$ M, P, N thẳng hàng.

289 Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N xác định bởi

$$3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} ; \qquad \overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$$

Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua trọng tâm G của tam giác.

Hướng dẫn

Chứng minh hệ thức $\overrightarrow{GM} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{GN}$.

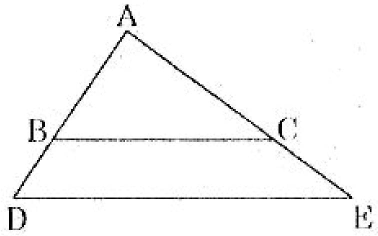
290 Cho tam giác ABC.

a) Dựng các điểm D, E thỏa mãn các hệ thức

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

b) Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

Hướng dẫn



a) Xem hình vẽ.

b) Ta có : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$

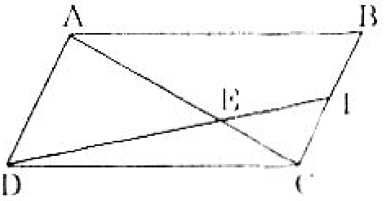
$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Hệ thức này chứng tỏ hai vectơ $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, suy ra A, C, E thẳng hàng.

291 Cho hình bình hành ABCD, I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

Hướng dẫn



Theo hệ thức Chasles, ta có :

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$= \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$

$$= \overrightarrow{DA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$

Mặt khác vì I là trung điểm của BC nên

$$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \quad (\text{vì } \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB})$$

Ta được : $\frac{3}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right)$

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DI}$$

Hệ thức này chứng tỏ hai vectơ $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DI}$ cùng phương.

Suy ra ba điểm D, E, I thẳng hàng.

292 Cho hình thang ABCD, đáy AB; M, N theo thứ tự là các trung điểm của AD, BC.

a) Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

b) Chứng minh MN // DC.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DM}) + (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC})$$

Vì M là trung điểm của AD nên $\vec{AM} + \vec{DM} = \vec{0}$, tương tự, $\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$

Vậy $\vec{AB} + \vec{DC} = 2\vec{MN}$ (đpcm).

b) Vì AB // DC ⇒ $\vec{AB} = k.\vec{DC}$. Kết hợp với câu a ta có

$$2\vec{MN} = k\vec{DC} + \vec{DC} \Rightarrow 2\vec{MN} = (k+1)\vec{DC} \Rightarrow \vec{MN} = \frac{k}{2}\vec{DC}$$

Vậy MN // DC.

293 Cho tam giác ABC, trọng tâm G; M là trung điểm của cạnh BC và I là điểm thỏa mãn hệ thức : $4\vec{CI} + \vec{AC} = \vec{0}$

Chứng minh MP // BG.

Hướng dẫn

Hãy chứng minh $\vec{MI} = \frac{3}{4}\vec{BG}$.

294 Cho tứ giác ABCD; E và F là trọng tâm của các tam giác ABD và BCD. Chứng minh EF // AC.

Hướng dẫn

Gọi I là trung điểm của đường chéo BD. Ta có :

$$\vec{IE} = \frac{1}{3}\vec{IA}\ ; \qquad \vec{IF} = \frac{1}{3}\vec{IC}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{IF} - \vec{IE} = \frac{1}{3}(\vec{IC} - \vec{IA}) \quad \Rightarrow \quad \vec{EF} = \frac{1}{3}\vec{CA}$$

Suy ra EF // AC.

295 Cho tam giác ABC; M là trung điểm của cạnh BC.

a) Dựng các điểm D, E sao cho $\vec{BD} = 4\vec{BA}$ và $\vec{AE} = 3\vec{AC}$.

b) Chứng minh DE // AM.

Hướng dẫn

a) Độc giả vẽ hình.

b) M là trung điểm của BC nên :

$$2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE}$$

Mặt khác $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = -4\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{AB}$

Theo giả thiết $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \qquad (1)$$

$$6\overrightarrow{AM} = 6.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{DE} = 6.\overrightarrow{AM}$

Hai vectơ $\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Rightarrow$ DE // AM.

296 Cho tam giác ABC.

a) Dựng các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Chứng minh MN // BC.

Hướng dẫn

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

297 Cho tam giác ABC.

a) Dựng các điểm I, J thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh IC // BJ.

Hướng dẫn

a) Độc giả tự dựng.

b) Ta có : $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \qquad (1)$

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BJ} = -3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ} \Rightarrow$ Suy ra đpcm.

298 Cho hình bình hành ABCD: I và J là các trung điểm của AB, CD.

a) Dựng các điểm E, F thỏa mãn : $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DI}$; $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BJ}$

b) Chứng minh AF // CE.

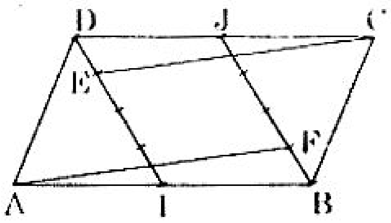
Hướng dẫn

a) Điểm E thuộc đoạn thẳng DI và thỏa mãn hệ thức $\frac{DE}{DI} = \frac{1}{4}$

F thuộc đoạn thẳng BJ và thỏa mãn hệ thức $\frac{BF}{BJ} = \frac{1}{4}$

b) Ta có : $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (1)

$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (2)



vì $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

nên từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{BJ}$

và do đó $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{BF}$ (3)

Ta lại có : $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\\ \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE}\end{array}\right|$

Kết hợp với (3) suy ra : $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{CE} \Rightarrow$ AF // CE.

299 Cho tam giác ABC với trọng tâm G và tam giác A'B'C' với trọng tâm là điểm G'.

a) Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

b) Suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG} + \overrightarrow{GA'}$

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B}$

$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C}) + 3\overrightarrow{GG'}$ (1)

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0} \qquad (2)$$

Vì G' là trọng tâm của tam giác A'B'C' nên :

$$\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

b) Khi $G \equiv G' \Rightarrow \overrightarrow{GG'}=\vec{0}$. Suy ra $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

Ngược lại, nếu $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ thì $3\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$

hay $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$, suy ra $G \equiv G'$.

Vậy : "Điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ ".

300 Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm là điểm G. Gọi G_1, G_2, G_3 theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác BCA', CAB', ABC'.

Chứng minh G cũng là trọng tâm của $\Delta G_1G_2G_3$.

Hướng dẫn

G_1 là trọng tâm của $\Delta BCA'$: $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GG_1}$ (1)

G_2 là trọng tâm của $\Delta CAB'$: $\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GG_2}$ (2)

G_3 là trọng tâm của $\Delta ABC'$: $\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{GG_3}$ (3)

G là trọng tâm của ΔABC : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (4)

G là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$: $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$ (5)

Từ (1), (2), (3), (4), (5) suy ra đpcm.

301 Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB.

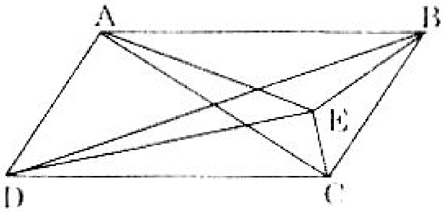
Chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có chung trọng tâm.

Hướng dẫn

Hãy chứng minh $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

302 Cho hình bình hành ABCD và một điểm E. Chứng minh hai tam giác ACE và BDE cùng trọng tâm.

Hướng dẫn



Gọi G là trọng tâm của tam giác ACE

Ta có : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}) = \vec{0}$

Vì ABCD là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

Vậy $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$. Đẳng thức cuối cùng này chứng tỏ G là trọng tâm của tam giác BDE.

303 Cho tam giác ABC. A' là điểm đối xứng của A qua B,

B' là điểm đối xứng của C qua A,

C' là điểm đối xứng của C qua A.

Chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn

Chứng minh $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

304 Cho tam giác ABC, các đường cao AA', BB', CC'.

Chứng minh nếu $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn

AA', BB', CC' giao nhau tại trực tâm H. Đẳng thức đã cho cũng có nghĩa là H cũng là trọng tâm của ΔABC. Tam giác ABC có trọng tâm và trực tâm trùng nhau.

305 Cho tam giác ABC và D là một điểm bất kì; DA, DB, DC theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A', B', C'.

Chứng minh rằng nếu ta có $\overrightarrow{BA'} - \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{C'B} = \vec{0}$ thì D là trọng tâm của tam giác ABC.

Hướng dẫn

Thay $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{DA'} - \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA'}$; ..., rút gọn ta đi đến

$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$, suy ra đpcm.

306 Cho tứ giác ABCD.

a) Xác định điểm G thỏa mãn hệ thức : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (*)

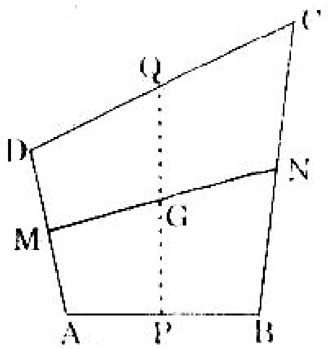
Điểm G thỏa mãn hệ thức (*) cũng được gọi là trọng tâm của tứ giác ABCD.

b) Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 theo thứ tự là các trọng tâm của các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh điểm G cũng là trọng tâm của tứ giác G_1, G_2, G_3, G_4.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0}$



Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng AB, CD, ta có :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GP}$$

$$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GQ}$$

$$\Rightarrow \quad 2\overrightarrow{GP} + 2\overrightarrow{GQ} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

Đẳng thức này chứng tỏ G là trung điểm của đoạn thẳng PQ.

Chú ý : Nếu gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC thì chứng minh tương tự, ta thấy G cũng là trung điểm của đoạn thẳng MN.

G là giao điểm của PQ, MN. Dễ thấy G là điểm duy nhất thỏa mãn hệ thức (*).

Người ta cũng chứng minh được G là trung điểm của đoạn thẳng nối hai trung điểm của các đường chéo AC, BD (Theo định lí Gergonne).

b) G_1 là trọng tâm của ΔABC : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG_1}$ (1)

G_2 là trọng tâm của ΔABC : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG_2}$ (2)

G_3 là trọng tâm của ΔABC : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG_3}$ (3)

G_1 là trọng tâm của ΔABC : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG_4}$ (4)

G là trọng tâm của tứ giác ABCD : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (5)

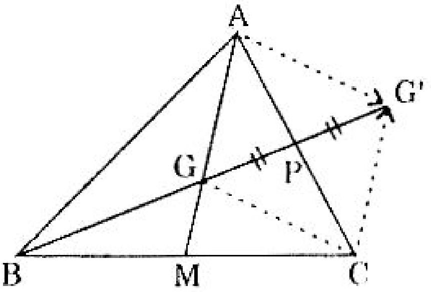
Từ (1), (2), (3), (4), (5) suy ra đpcm.

$\boxed{307}$ Cho tam giác ABC, các trung tuyến AM, BP, trọng tâm G và G' là điểm đối xứng với điểm G qua P.

a) Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AG'}$; $\overrightarrow{CG'}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh đẳng thức : $\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$.

Hướng dẫn



a) G là trung điểm của BG' :

$$2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG'} + \overrightarrow{AB} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \text{ và } 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Suy ra : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\overrightarrow{AG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Tương tự, ta tính được $\overrightarrow{CG'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

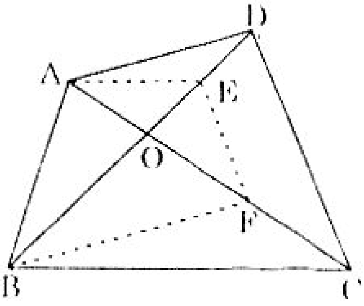
b) Ta có : $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG'}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MG'} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MG'} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad 6\overrightarrow{MG'} = \overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}.$$

$\boxed{308}$ Cho tứ giác ABCD. Qua đỉnh A kẻ đường thẳng song song với cạnh BC, đường này cắt đường chéo BD tại điểm E. Đường thẳng qua B song song với cạnh AD, cắt đường chéo AC tại điểm F.

Chứng minh EF // CD.



Hướng dẫn

Hai vectơ $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ cùng phương, do đó

$$\overrightarrow{OC} = k_1\,\overrightarrow{OA}$$

Tương tự $\quad \overrightarrow{OD} = k_2\,\overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = k_1\,\overrightarrow{OA} - k_2\,\overrightarrow{OB} \qquad (1)$$

Vì AE // BC nên $\dfrac{OB}{OE} = \dfrac{OC}{OA} = k_1 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OE} = \dfrac{1}{k_1}\overrightarrow{OB}$

Tương tự, ta có : $\quad \overrightarrow{OF} = \dfrac{1}{k_2}\overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF} = \frac{1}{k_1}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{k_2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{k_1 + k_2}(k_2\,\overrightarrow{OB} - k_1\,\overrightarrow{OA})$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{FE} = -\frac{1}{k_1k_2}(k_1\,\overrightarrow{OA} - k_2\,\overrightarrow{OB}) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\quad \overrightarrow{FE} = -\dfrac{1}{k_1k_2}\overrightarrow{DC}$

Suy ra $\quad$ FE // DC.

309 Cho hình bình hành ABCD và hai điểm E, F được xác định bởi các hệ thức

$$(1):\ \overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} = \vec{0}\,; \qquad (2):\ \overrightarrow{DF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \vec{0}$$

a) Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.

b) Xác định điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AF}$.

Hướng dẫn

a) Từ (1) suy ra $\quad \overrightarrow{CE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

Từ (2) suy ra $\quad \overrightarrow{DF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

Từ đây ta tính được : $\quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD})$$

Suy ra : $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ $\Rightarrow$ suy ra đpcm.

b) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{ME} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ M là trung điểm của AE.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$ $\Rightarrow$ ADEC là hình bình hành. Do đó M cũng là trung điểm của đường chéo CD.

310 Cho đoạn thẳng AB và một điểm C bất kì thuộc đoạn thẳng AB sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$. Gọi S là một điểm bất kì trong mặt phẳng.

Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{SC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{SA} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{SB}$.

Hướng dẫn

Áp dụng tính chất tỉ lệ thức, ta được $\frac{AC}{AB} = \frac{m}{m+n}$. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương cho ta $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} = \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA})$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{SC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{SA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{SB}.$$

311 Cho tam giác ABC và hai điểm D, E thỏa mãn các hệ thức :

(1): $\overrightarrow{DB} = k\overrightarrow{DC}$; (2) : $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{EC}$ với $k \neq 1$

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh hai tam giác ABC và ADE có cùng trọng tâm.

c) Điểm F, I thỏa mãn các hệ thức : $\overrightarrow{FA} = k\overrightarrow{FB}$; $\overrightarrow{IC} = k\overrightarrow{IA}$

Chứng minh hệ thức : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

Đem thế vào (1) và rút gọn, ta được :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{k-1}\overrightarrow{AB}$$

Tương tự ta được $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{k-1}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AB}$

Kết hợp hai đẳng thức này với $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ ta được :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{k+1}{k-1}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$

b) Từ (1) ta biến đổi và được $\overrightarrow{DB} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BC}$

Từ (2) ta được : $\overrightarrow{EC} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{CB}$

Suy ra $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

Ta có : $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EC}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB}$

Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác ADE.

c) Từ $\overrightarrow{AI} = k\,\overrightarrow{IA}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{k-1}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$ suy ra $\overrightarrow{BI} = \frac{-1}{k-1}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Từ giả thiết $\overrightarrow{FA} = k\,\overrightarrow{FB}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AF} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AB}$

và ta tính ra $\overrightarrow{CF} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ cho ta :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AC} + \frac{-1}{k-1}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} + \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AB} + \frac{-1}{k-1}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

312 Cho tam giác ABC, trọng tâm G; D, E, F theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

P là một điểm tùy ý và A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của P qua các điểm D, E, F.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C'A'} = \vec{0}$.

b) Có thể nói gì về ba đoạn thẳng AA', BB', CC' ?

c) Gọi M là giao điểm của AA' và BB'. Chứng minh ba điểm P, G, M thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{ED}$; $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{DE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = \vec{0}$

Chứng minh tương tự cho các hệ thức tiếp theo.

b) AA', BB', CC' đồng quy tại 1 điểm.

c) Chứng minh hệ thức $\overrightarrow{PM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PG}$.

313 Cho hình bình hành ABCD, tâm O và E, F là hai điểm được xác định bởi các hệ thức : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{k}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{k}\overrightarrow{CD}$, $k \neq 0$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{OE}$ và $\overrightarrow{OF}$ là hai vectơ đối nhau.

Suy ra ba điểm O, E, F thẳng hàng và O là trung điểm của E, F.

b) Chứng minh tứ giác AECF là hình bình hành.

Hướng dẫn

a) Ta có $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{k}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \frac{1}{k}\overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OE} = \frac{1}{k}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \qquad (1)$$

Tương tự ta có
$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{k}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OC} \qquad (2)$$

ABCD là hình bình hành tâm O nên $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OF} \Rightarrow \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$

Từ đây suy ra đpcm.

b) Từ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{k}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{k}\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

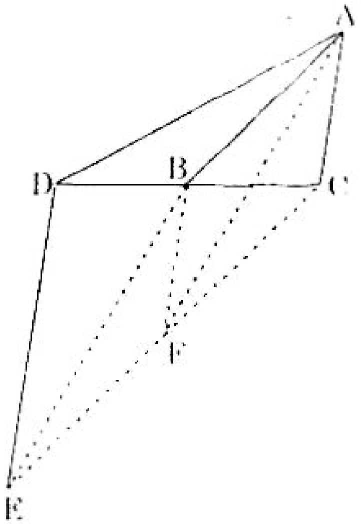
ta suy ra $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC} \Rightarrow$ AECF là hình bình hành.

314 Cho tam giác ABC.

a) Dựng các điểm D, E, F thỏa mãn các đẳng thức :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC}; \qquad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FE}$$

b) Chứng minh tứ giác ABEF là hình bình hành.



Hướng dẫn

a) *Dựng điểm D :*

Từ $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Suy ra $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$ hay AB là trung tuyến của $\Delta ADC \Rightarrow$ B là trung điểm của DC.

Dựng điểm E :

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AC}.$$

Từ D ta kẻ đường thẳng song song với AC và vẽ vectơ $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AC}$. Ta được điểm E.

Dựng điểm F :

Từ $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FE} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{CF} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$

Vậy F là trung điểm của đoạn thẳng CE.

b) Ta có : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

Theo giả thiết, ta có : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE} \Rightarrow$ Tứ giác ABEF là hình bình hành.

III. TRỤC TỌA ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

1. Trục tọa độ

Trục tọa độ là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm gốc O và một vectơ đơn vị $\vec{i}$

Trên trục tọa độ $(O; \vec{i})$ *thì :*

+ $\vec{u} = a\,\vec{i}$ ⇒ *a là tọa độ của vectơ* $\vec{u}$

+ $\vec{OM} = m\,\vec{i}$ ⇒ *m là tọa độ của điểm M*

+ $\vec{AB} = \overline{AB}\,\vec{i}$ ⇒ $\overline{AB}$ *là độ dài đại số của vectơ* $\vec{AB}$.

2. Hệ trục tọa độ

Trong hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$ *thì* $\vec{u}(x, y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

Các kiến thức quan trọng về tọa độ :

a) Tọa độ của vectơ

$A(x_A, y_A);\ B(x_B, y_B) \Rightarrow \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

$\vec{u} = x\,\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2 \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y);\quad |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) Các phép toán : $\vec{u} = (x; y)$; $\vec{v} = (x'; y')$

- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$
- $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$
- $k\,\vec{u} = (kx; ky)$
- *Tích vô hướng :* $\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$.
  - *Điều kiện hai vectơ cùng phương :* $xy' - x'y = 0$
  - *Điều kiện hai vectơ vuông góc :* $xx' + yy' = 0$

c) Trung điểm và trọng tâm

- *Cho* $A(x_A, y_A)$ *và* $B(x_B; y_B)$

  I là trung điểm của AB : $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

- *Cho tam giác ABC, G là trọng tâm :*

$$x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C); \qquad y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C).$$

- *Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k*

$$\overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB} \quad \text{thì : } x_M = \frac{x_A - kx_B}{1-k}; \quad y_M = \frac{y_A - ky_B}{1-k}, \quad k \neq 1.$$

BÀI TẬP

315 Cho ba điểm A(2; –1); B(3; 4); C(–5; 2).

a) Xác định tọa độ các vectơ $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$

b) Xác định điểm M thỏa mãn hệ thức : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{OA} = (2; -1)$; $\overrightarrow{OB} = (3; 4)$; $\overrightarrow{OC} = (-5; 2)$

b) Từ hệ thức đã cho ta có : $6\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} \Rightarrow M\left(-\frac{7}{6}; \frac{13}{6}\right)$.

316 Cho hai điểm A(3; 0); B(–3; 0). Xác định các điểm C, D thỏa mãn các hệ thức : $\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DB} = \vec{0}$.

Hướng dẫn

$$C\left(-\frac{3}{2}; 0\right); \qquad D(-6; 0).$$

317 Cho bốn điểm A(1; 0); B(–2; 1); C(–2; 0); D(–1; 3).

a) Tính các tích vô hướng : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

b) Nghiệm lại hệ thức : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

Hướng dẫn

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 3$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = -3$

b) $0 + 3 - 3 = 0$.

318 Cho bốn điểm $A(-1; 5)$; $B\left(2; \frac{1}{2}\right)$; $C(3; -1)$; $D\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

a) Chứng minh điểm D nằm trên đường thẳng AB.

b) Chứng minh điểm B thuộc đoạn thẳng AC.

Hướng dẫn

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(3; -\frac{9}{2}\right) = 3\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ (1)

$\overrightarrow{AD} = \left(\frac{4}{3}; -2\right) = \frac{4}{3}\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$

đẳng thức này chứng tỏ hai vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương. Vậy ba điểm A, B, D thẳng hàng, hay điểm D nằm trên đường thẳng AB.

b) Ta có $\overrightarrow{BA} = \left(-3; \frac{9}{2}\right)$; $\overrightarrow{BC} = \left(1; -\frac{3}{2}\right)$

Từ đây ta có $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{BC}$

đẳng thức này chứng tỏ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ là hai vectơ ngược hướng. Vậy điểm B nằm giữa hai điểm A, C hay điểm B thuộc đoạn thẳng AC.

319 Cho bốn điểm $A(-2; 4)$; $B(2; 0)$; $C(3; -1)$, $D(1; 1)$.

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D nằm trên một đường thẳng.

b) Xác định vị trí tương đối giữa bốn điểm ấy.

Hướng dẫn

a) Xét các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$.

b) Điểm B nằm giữa hai điểm D, C

D nằm giữa hai điểm A, B

Thứ tự sắp xếp như sau : A, D, B, C.

320 Cho 3 điểm $A(-6; 2)$; $B(2; 6)$; $C(7; -8)$

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là các đỉnh của một tam giác.

b) Tìm điểm D trong mặt phẳng sao cho tứ giác ABDC là hình bình hành.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (8; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (13; -10)$

Vì $\dfrac{8}{13} \neq \dfrac{4}{-10}$ $\Rightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Vậy A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Để ABDC là hình bình hành thì ta phải có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

Gọi (x; y) là tọa độ của D, ta có : $\overrightarrow{CD} = (x - 7; y + 8)$

$$\overrightarrow{AB} = (8; 4)$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 7 = 8 \\ y + 8 = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D(15; -4).$$

Chương 2

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC BẤT KÌ (TỪ 0^0 ĐẾN 180^0)

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Giá trị lượng giác của các góc phụ nhau (α và $90^0 - \alpha$)*

$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha); \qquad \cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha)$$

$$\tan\alpha = \cot(90^0 - \alpha); \qquad \cot\alpha = \tan(90^0 - \alpha)$$

2. *Giá trị lượng giác của các góc bù nhau*

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha); \qquad \cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$$

$$\tan\alpha = -\tan(180^0 - \alpha); \qquad \cot\alpha = -\cot(180^0 - \alpha)$$

Các góc bù nhau thì sin bằng nhau, còn cosin, tang, cotang thì đối nhau.

3. *Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt*

Góc	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	KXĐ	$-\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	KXĐ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	KXĐ

4. *Một số liên hệ cơ bản*

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

c) $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$

d) $\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad \cot^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

BÀI TẬP

321 a) Cho biết $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$ $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$

- Tìm góc α.
- Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

b) Cho biết $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

Tính $\tan 75^\circ$; $\sin 75^\circ$; $\cos 75^\circ$; $\cot 165^\circ$; $\tan 165^\circ$; $\sin 165^\circ$.

Hướng dẫn

a) $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13} \Rightarrow \cos\alpha \approx -0{,}3846 \Rightarrow \alpha \approx 112^\circ 19'$.

Sử dụng liên hệ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \left(-\dfrac{5}{13}\right)^2 = \dfrac{144}{13^2}$

Với $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \sin\alpha > 0$ nên :

$$\sin^2\alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{12}{5} = -2{,}4; \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{5}{12}.$$

b) Đáp số : $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$; $\cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1); \quad \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

$$\cot 165^\circ = -(2 + \sqrt{3}); \quad \tan 165^\circ = \sqrt{3} - 2$$

$$\sin 165^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1); \quad \cos 165^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$$

322 Cho $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$ $(0 < \beta < 180^\circ)$. Tính β và $\cos\beta$, $\tan\beta$, $\cot\beta$.

Hướng dẫn

Đáp số : $\beta \approx 53^\circ 10'$ hoặc $126^\circ 50'$; $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$ hoặc $\cos\beta = -\dfrac{3}{5}$;

$$\tan\beta = \frac{4}{3} \text{ hoặc } \tan\beta = -\frac{4}{3}; \quad \cot\beta = \frac{3}{4} \text{ hoặc } \cot\beta = -\frac{3}{4}.$$

323 Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy tính giá trị của các biểu thức :

a) $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

b) $B = \tan 1^\circ.\tan 2^\circ.\tan 3^\circ...\tan 88^\circ.\tan 89^\circ$

c) $C = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + ... + \cos^2 180^\circ$.

Hướng dẫn

a) Chú ý : Các góc 20° và 160° bù nhau ...

Đáp số : $A = -1$.

b) Chú ý : $\tan 89^\circ = \cot 1^\circ \Rightarrow \tan 1^\circ.\tan 89^\circ = \tan 1^\circ.\cot 1^\circ = 1$.

Đáp số : $B = 1$.

c) Ta có : $\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ \Rightarrow \cos^2 170^\circ = \cos^2 10^\circ$

$$C = 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + ... + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ) + \cos^2 90^\circ + \cos^2 180^\circ$$

$$\Rightarrow C = 2[(\cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ) + ... + (\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ)] + 1$$

(vì $\cos^2 90^\circ = 0$; $\cos^2 180^\circ = (-1)^2 = 1$)

Mặt khác $\cos 80^\circ = \sin 10^\circ \Rightarrow \cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ = \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ = 1$

cho ta $C = 2.4 + 1$, $\Rightarrow$ $C = 9$.

324 Cho biết $\tan\alpha = -2$. Tính giá trị biểu thức : $P = \dfrac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$.

Hướng dẫn

Đáp số : $P = -\dfrac{1}{3}$.

325 Cho biết $0 < \alpha < 90^\circ$

a) Chứng minh $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

b) Với $\sin\alpha + \cos\alpha = a$, tính $\sin\alpha.\cos\alpha$; $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$

Với $0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0$ $\Rightarrow$ $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 > 1$

$\Rightarrow$ $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$ (đpcm).

b) Đáp số : $\sin\alpha.\cos\alpha = \dfrac{a^2 - 1}{2}$; $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \dfrac{-a^4 + 2a^2 + 1}{2}$.

326 Chứng minh rằng nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thì ta có các hệ thức :

a) $\sin A = \sin(B + C)$ **b)** $\sin\dfrac{A}{2} = \cos\dfrac{B + C}{2}$

c) $\sin\frac{A+B+3C}{2} = \cos C$ **d)** $\cos(A+B-C) = -\cos 2C$

e) $\tan\frac{A+B-2C}{2} = \cot\frac{3C}{2}$.

Hướng dẫn

Chú ý liên hệ : $A + B + C = 180^0$.

327 Rút gọn các biểu thức :

a) $A = \sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}} + \sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}}$ với $0 < a < 90^0$.

b) $B = \frac{1}{\sin a + \sqrt{\cot^2 a - \cos^2 a}}$ với $90^0 < a < 180^0$.

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** $A = \frac{2}{\cos a}$; **b)** $B = \sin a$.

328 Chứng minh biểu thức : $P = \frac{\cot^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cot^2\alpha} + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cot\alpha}$ không phụ thuộc vào α.

Hướng dẫn

$P = 1$.

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ***Định nghĩa :*** *Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ là **một số**, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})$*

2. ***Hệ quả***

+ *Bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$:*

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Công thức này được sử dụng để tính độ dài của vectơ, độ dài đoạn thẳng :

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$$

+ ***Điều kiện vuông góc của hai vectơ***

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$; $\vec{b} \neq \vec{0}$ *vuông góc với nhau là tích vô hướng của chúng bằng 0*

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

3. *Tính chất*

Tích vô hướng của hai vectơ có các tính chất :

+ *Giao hoán :* $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

+ *Kết hợp :* $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

+ $(k.\vec{a}).\vec{b} = k.(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$

+ $\vec{a}^2 \geq 0,$ $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

4. *Biểu thức tọa độ của tích vô hướng*

Cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y)$; $\vec{b} = (x'; y')$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy'.$$

Hệ quả

a) Bình phương vô hướng của vectơ

$$\vec{a}^2 = x^2 + y^2$$

– *Suy ra độ dài vectơ :* $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

– *Khoảng cách giữa hai điểm :* $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$

$$\Rightarrow \quad AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

b) Góc giữa hai vectơ

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

c) Điều kiện cần và đủ để hai vectơ vuông góc

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

BÀI TẬP

329 Cho tam giác đều ABC, cạnh a.

a) Tính các tích vô hướng : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

b) Tính tổng : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn

a) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|.\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

$$= -a.a.\cos 60^0 = -\frac{a^2}{2}$$

Tương tự, ta tính được $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2}$

b) Đáp số : $-\frac{3}{2}a^2$.

330 Cho tam giác ABC, biết AB = c, BC = a, CA = b.

a) Tính các tích vô hướng : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

b) Tính tổng : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn

a) Đáp số : $-\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$; $-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$; $-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$

b) $-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

331 Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì trong mặt phẳng.

Chứng minh hệ thức Euler : $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Hướng dẫn

Ta có : $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}$ (1)

Tương tự $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$ (2)

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) vế với vế, ta được đpcm.

332 Cho tam giác ABC có các cạnh AB = c, BC = a, CA = b, trọng tâm G và một điểm M bất kì.

a) Chứng minh hệ thức Leibnizt :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \qquad (1)$$

b) Chứng minh : $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (2)$

c) Tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn hệ thức : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$ với k là một độ dài cho trước.

d) Chứng minh hệ thức Euler : $GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3(R^2 - GO^2)$ với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn

a) Từ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} \Rightarrow MA^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2$

Tương tự ta có : $MB^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + GB^2$

$$MC^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + GC^2$$

Cộng các đẳng thức trên, vế với vế, kết hợp với $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ suy ra đpcm.

b) Cho M trùng với A $\Rightarrow$ $AB^2 + AC^2 = 4AG^2 + GB^2 + GC^2$

Tương tự, cho M trùng với B và M trùng với C, ta suy ra :

$$AB^2 + BC^2 = 4BG^2 + GA^2 + GC^2$$
$$BC^2 + AC^2 = 4CG^2 + GA^2 + GB^2 .$$

Cộng các đẳng thức trên vế với vế, suy ra đpcm.

c) Ta có, từ (1) suy ra : $MG = \sqrt{\frac{k^2 - (GA^2 + GB^2 + GC^2)}{3}}$ = không đổi,

suy ra quỹ tích M là đường tròn tâm G bán kính $\frac{1}{3}\sqrt{3k^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$

d) Cho M trùng với tâm O, với chú ý OA = OB = OC = R

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

333 Cho hình chữ nhật ABCD, tâm O và một điểm P bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh :

a) $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. Phát biểu kết quả này dưới dạng một định lí.

b) $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PD}$.

c) $2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PD} + PA^2$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})^2 = PA^2 + PC^2 + 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PC}$

$$(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})^2 = PA^2 + PC^2 - 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PC}$$

$$\Rightarrow \quad PA^2 + PC^2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})^2 + \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})^2$$

O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PO}$; $\quad \overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CA}$

$$\Rightarrow \quad PA^2 + PC^2 = 2PO^2 + \frac{1}{2}CA^2 \qquad (1)$$

Tương tự ta có $\quad PB^2 + PD^2 = 2PO^2 + \frac{1}{2}BD^2 \qquad (2)$

ABCD là hình chữ nhật : AC = BD $\qquad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra đpcm.

b) Từ các kết quả trong câu a) ta có $\quad 4\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PC} = 4\overrightarrow{PO} - CA^2$

$$4\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} - BD^2$$

Suy ra đpcm.

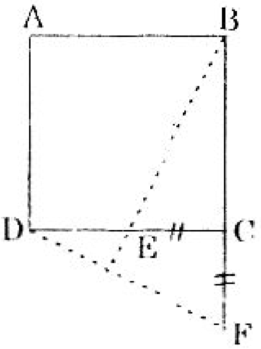
c) Ta có $\quad \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})$

Mặt khác $\quad \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PO}$.

Vậy $\quad \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PO}$.

334 Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CD lấy một điểm E. Trên tia BC có một điểm F sao cho CF = EC. Chứng minh BE ⊥ DF.

Hướng dẫn



Xét tích $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DF}$ ta có :

$$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DF} = (\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF})$$

$$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CF}$$

Rõ ràng $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC} = 0$; $\quad \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CF} = 0$

Gọi cạnh hình vuông là a thì :

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CF} = \frac{a^2}{2}; \qquad \overrightarrow{CE}.\overrightarrow{DC} = -\frac{a^2}{2}$$

Từ các kết quả trên, suy ra : $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DF} = 0 \Rightarrow BE \perp DF$.

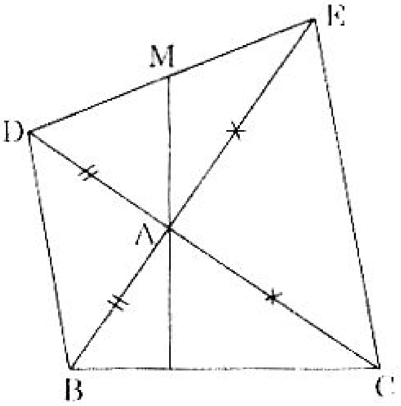
335 Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A. Trên các cạnh AB, AC và về phía ngoài của tam giác ta dựng các tam giác ABD, ACE vuông, cân đỉnh A, M là trung điểm của DE.

a) Chứng minh AM ⊥ BC.

b) Xét trường hợp tam giác ABC là tam giác bất kì.

Chứng minh rằng kết luận trên vẫn đúng.

Hướng dẫn



a) Xét tích $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$

M là trung điểm của DE nên :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AM}$$

$$\Rightarrow \quad 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}).\overrightarrow{BC}$$

$$= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}$$

Rõ ràng $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} = 0$; $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = 0$

Các điểm D, A, C thẳng hàng,

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AD}|.|\overrightarrow{AC}|\cos 180^\circ = -AD.AC$$

Tương tự $\quad \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{AE}|.|\overrightarrow{BA}|\cos 0^\circ = AE.AB$

mà DA = AB và AC = AE, suy ra $\quad \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = 0$

Vậy $\quad 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad AM \perp BC$.

b) Trường hợp tam giác ABC bất kì, ta chú ý

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AD}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = AD.AC.\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$$

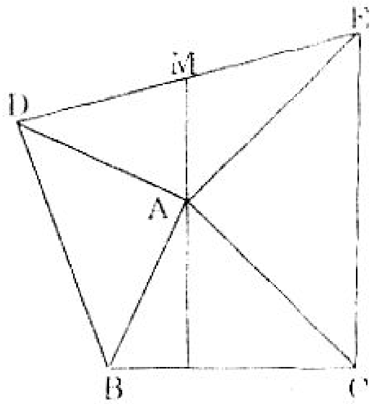
$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{AE}|.|\overrightarrow{BA}|.\cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}) = AE.AB.\cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA})$$

Dễ thấy hai góc $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ và $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA})$ là hai góc bù nhau nên :

$$\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = -\cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA})$$

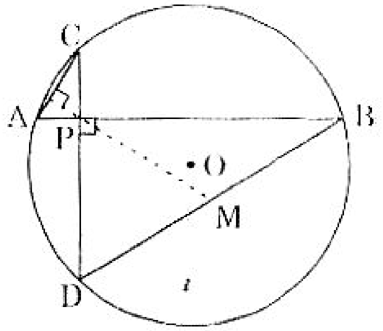
Kết quả ta vẫn có :

$$2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad AM \perp BC.$$



336 Cho đường tròn tâm O và một điểm P thuộc miền trong của đường tròn. Qua P, kẻ hai dây AB, CD vuông góc với nhau. Gọi M là trung điểm của dây BD. Chứng minh PM ⊥ AC.

Hướng dẫn



Xét tích $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AC}$.

Thay $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PB})$; $\quad \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA})$

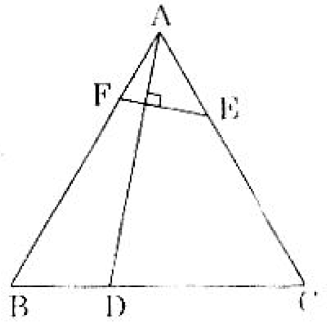
và chú ý : $\quad \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \mathscr{P}_{P/(O)}$

337 Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh BC, CA, AB theo thứ tự có các điểm D, E, F xác định bởi các hệ thức :

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}; \qquad \overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}; \qquad \overrightarrow{AF} = \frac{4}{15}\overrightarrow{AB}.$$

Chứng minh AD ⊥ EF.

Hướng dẫn



Ta có : $\quad \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} \quad \text{mà} \quad \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF} = -\frac{4}{15}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Suy ra $\quad \overrightarrow{FE} = -\frac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Xét tích $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{FE} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\left(-\frac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$$= -\frac{8}{45}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2 + \left(\frac{2}{9} - \frac{4}{45}\right)\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \qquad (*)$$

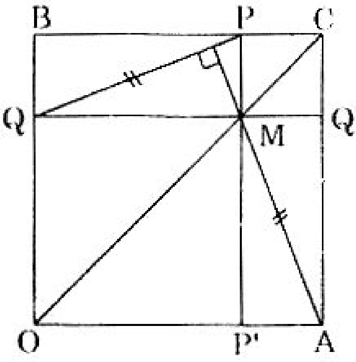
Vì AB = AC và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|.\cos 60^0 = AB^2.\frac{1}{2}$

Từ (*) ta suy ra $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{FE} = 0 \Rightarrow AD \perp FE$.

338 Cho hình vuông OACB và một điểm M thuộc đường chéo OC. Kẻ đường thẳng PP' qua M và vuông góc với OA, đường thẳng QQ' qua M và vuông góc với OB.

a) Chứng minh AM = PQ   **b)** Chứng minh AM ⊥ PQ.

Hướng dẫn



a) $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MQ}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{QP}^2 = \overrightarrow{MP}^2 + \overrightarrow{MQ}^2 - 2\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{MP}$$

$$= \overrightarrow{MP}^2 + \overrightarrow{MQ}^2$$

Tương tự ta có : $\overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MP'}^2 + \overrightarrow{MQ'}^2$

Vì $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MQ'}|$ và $|\overrightarrow{MQ}| = |\overrightarrow{MP'}|$. Suy ra QP = AM.

b) Xem cách giải bài 321, 322.

339 Cho tam giác ABC; G là trọng tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một điểm H là trực tâm của tam giác là hệ thức Euler sau đây được thỏa mãn

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \qquad (*)$$

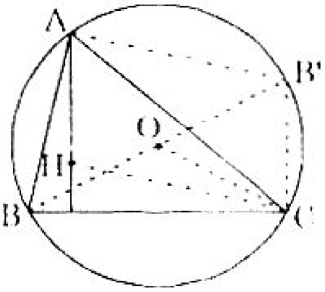
b) Chứng minh ba điểm O, H, G thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) Ta chứng minh nếu hệ thức (*) được thỏa mãn thì H là trực tâm của Δ

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$ mà $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$;



Ta lại có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

$$= \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OB}^2 = 0 \quad (\text{vì } OB = OC = R)$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad AH \perp BC.$$

Chứng minh tương tự, ta có BH ⊥ AC, CH ⊥ AB hay H là trực tâm của ΔABC.

Ngược lại, nếu H là trực tâm của tam giác thì $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Gọi B' là điểm xuyên tâm đối của điểm B. Ta chứng minh dễ dàng tứ giác AHCB' là hình bình hành, cho ta $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$;

mặt khác $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB'}$ mà $\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB}$

nên ta có $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

b) Vì G là trọng tâm của ΔABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

Ta có : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$

Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

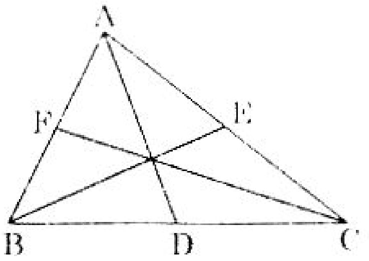
Kết hợp với kết quả câu a) ta có : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow$ ba điểm O, H, G thẳng hàng.

340 Cho tam giác ABC và các trung tuyến AD, BE, CF.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Hướng dẫn



a) Ta có : $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

$2\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$ (đpcm).

b) Ta có : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$; $2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{BC}$

$2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$ (1)

Tương tự ta có : $2\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$ (2)

$2\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$ (3)

Cộng (1); (2); (3) vế với vế suy ra đpcm.

341 Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi : $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

b) Nếu $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ thì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BD}^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD})$ (1)

Gọi I là trung điểm của CD thì

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BI}$

Mặt khác : $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$

Đẳng thức (1) trở thành

$2\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}) = 0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$

b) Xét tích $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$

$$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD} \qquad (2)$$

Do $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ nên (2) trở thành

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA}$

Vì $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ nên $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA} = 0$ và ta có :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

342 Cho ba điểm $A(0; \sqrt{3})$; $B(2; \sqrt{3})$; $C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tính các góc của tam giác.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (2; 0)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{2}{\frac{3}{2}} \neq \dfrac{0}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C là ba điểm không thẳng hàng.

b) Ta có : $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{2.\frac{3}{2} + 0.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2.\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^0$

$\cos B = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{-2.\left(-\frac{1}{2}\right) + 0.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2.1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^0$

Ta có ngay $\hat{C} = 90^0$.

Chú ý : Ta có thể giải câu a) theo cách sau :

$\overrightarrow{AB} = (2; 0) \Rightarrow AB = |\overrightarrow{AB}| = 2$

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad BC = |\overrightarrow{BC}| = 1$$

Rõ ràng $AB - BC < AC < AB + AC$

AB, BC, CA thỏa mãn bất đẳng thức tam giác nên ba điểm A, B, C là đỉnh của một tam giác.

Ngòai ra ta còn có $AC^2 + BC^2 = 3 + 1 = 4$

$$AB^2 = 2^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \Rightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại đỉnh } C.$$

343 Cho bốn điểm A(0; 2); B(6; 9); C(4; 1); D(2; 10).

a) Chứng minh tam giác ABC vuông.

b) Chứng minh tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

c) Gọi C' là điểm thỏa mãn hệ thức vectơ $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$

Chứng minh hai điểm D và C' đối xứng với nhau qua điểm B.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{BC} = (-2; -8)$; $\quad \overrightarrow{AC} = (4; -1)$

$$\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$$

Tam giác ABC vuông tại đỉnh C.

b) Ta lại có $\overrightarrow{DB} = (4; -1)$ nên $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow$ tứ giác ACBD là hình bình hành.

ACBD là hình bình hành có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

c) Gọi tọa độ của C' là (x; y)

$$\overrightarrow{CC'} = (x - 4; y - 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (6; 7)$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 6 \Rightarrow x = 10 \\ y - 1 = 7 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$

Suy ra C' = (10; 8).

Ta có : $\overrightarrow{BD} = (-4; 1)$ (1)

$\overrightarrow{BC'} = (4; -1)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BC'}$ là hai vectơ đối nhau, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng DC' hay hai điểm D và C' đối xứng nhau qua điểm B.

344 Cho hai điểm E(-5; 1); F(2; -4). Tìm tọa độ giao điểm D của đường thẳng EF với trục hoành.

Hướng dẫn

D là giao điểm của EF với trục hoành, tọa độ của D là (x; 0). Ta có :

$\overrightarrow{EF} = (7; -5)$, $\overrightarrow{ED} = (x + 5; -1)$

Ba điểm E, F, D thẳng hàng nên hai vectơ $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{ED}$ cùng phương, cho ta :

$$\frac{x+5}{7} = \frac{-1}{-5} \Rightarrow x = -\frac{18}{5} \Rightarrow D\left(-\frac{18}{5}; 0\right).$$

345 Cho ba điểm A(4; 6); B(-4; 0); C(-1; -4).

a) Chứng tỏ A, B, C là đỉnh của một tam giác. Xác định hình dạng tam giác ABC.

b) Xác định tọa độ điểm H, chân đường cao BH

c) Tính diện tích tam giác.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-8; -6)$, $\overrightarrow{AC} = (-5; -10)$

Vì $\frac{-8}{-5} \neq \frac{-6}{-10}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là hai vectơ không cùng phương, ba điểm A, B, C không thẳng hàng hay A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

Ta lại có $\overrightarrow{BC} = (3; -4)$

$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại đỉnh B.

b) Gọi tọa độ của H là (x; y). Ta có :

$\overrightarrow{BH} = (x + 4; y)$; $\overrightarrow{AH} = (x - 4; y - 6)$

Vì $BH \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -5(x+4) - 10.y = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y + 4 = 0$ (1)

Điểm H thuộc BC nên hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương cho ta :

$-10(x-4) - (-5)(y-6) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0$ (2)

Tọa độ của H phải thỏa mãn cả hai phương trình (1) và (2) nên tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(0; -2).$$

c) Ta có : $BH^2 = (0+4)^2 + (-2-0)^2 = 20 \Rightarrow BH = 2\sqrt{5}$

$BC^2 = (-1-4)^2 + (-4-6)^2 = 125 \Rightarrow BC = 5\sqrt{5}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BH = 25$ (đvdt).

346 Cho bốn điểm A(−3; 1); B(2; 10); C(4; 6); D(−1; 3).

a) Chứng minh tứ giác ABCD là hình bình hành

b) Xác định tọa độ tâm I của hình bình hành.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **b)** $I\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

347 Chứng minh tứ giác ABCD với A(4; 3); B(5; 2); C(−2; −5); D(−3; −4) là hình chữ nhật.

Hướng dẫn

Ta có : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow$ ABCD là hình bình hành (1)

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

348 Chứng minh tứ giác với A(−3; 6); B(−2; −1); C(5; 0); D(4; 7) là hình vuông.

Hướng dẫn

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow$ ABCD là hình bình hành (1)

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$ (2)

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra đpcm.

349 Xác định hình dạng tứ giác ABCD trong các trường hợp sau :

a) A(2; 6); B(3; 3); C(−3; 1); D(−4; 4)

b) A(−2; −1); B(−1; 3); C(3; 2); D(2; −2)

c) A(2; 1); B(3; 6); C(−2; 5); D(−3; 0).

Hướng dẫn

a) Hình bình hành **b)** Hình vuông **c)** Hình thoi.

350 Trong mặt phẳng tọa độ, cho bốn điểm A(−2; −6); B(4; −4); C(2; −2); D(−1; −3). Xác định hình dạng tứ giác ABCD.

Hướng dẫn

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$; $\overrightarrow{DC} = (3; 1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DC} \Rightarrow$ Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ cùng phương

Suy ra AB // DC ⇒ ABCD là hình thang.

351 Cho bốn điểm A(−1; 2); B(1; −1); C(2; 4); D(6; −2).

a) Chứng minh tứ giác ABDC là hình thang nhưng không phải là hình bình hành.

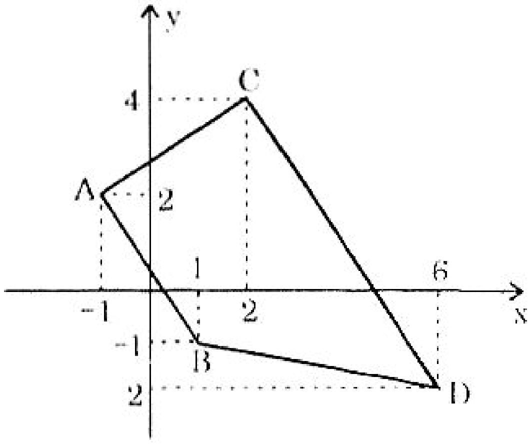
b) Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh IJ // AB

c) Gọi K là trung điểm của BC và L là điểm thỏa mãn hệ thức

$$2\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD}.$$

Chứng minh hai điểm K, L thẳng hàng với hai điểm I, J.

Hướng dẫn



a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -3)$; $\overrightarrow{CD} = (4; 6)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương

⇒ AB // CD (1)

$\overrightarrow{AC} = (3; 2)$; $\overrightarrow{DB} = (5; -1)$

Vì $\frac{3}{5} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ không cùng phương nên AC không song song với BD (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

b) Ta có $I\left(\frac{1}{2}; 3\right); J\left(\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \left(3; -\frac{9}{2}\right) = \frac{3}{2}(2; -3)$

Ta được $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Rightarrow$ IJ // AB.

c) Ta có $K\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Gọi tọa độ của L là (x; y). Theo giả thiết

$$2\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(x+1) = 7 \\ 2(y-2) = -4 \end{array}\right. \Rightarrow L\left(\frac{5}{2}; 0\right)$$

Từ đó $\overrightarrow{IK} = \left(1; -\frac{3}{2}\right); \quad \overrightarrow{IL} = (2; -3) = 2\left(1; -\frac{3}{2}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IL} \Rightarrow \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IL} \text{ cùng phương.}$$

Suy ra ba điểm I, K,L thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, ta được J, K, L thẳng hàng, suy ra đpcm.

352 Cho năm điểm : $A(-5; 6); B(0; -3); C\left(\frac{7}{2}; -1\right); D(2; 3); E\left(-\frac{5}{2}; -3\right)$.

a) Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{ME}$.

b) Tìm tọa độ điểm F để tứ giác ABCF là hình bình hành.

c) Tìm điểm I là giao điểm của đường thẳng CE với trục tung.

d) Tìm điểm I thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 3\overrightarrow{CE}$ và điểm Q thỏa mãn hệ thức $4\overrightarrow{QA} + 3\overrightarrow{QD} = \vec{0}$.

Hướng dẫn

a) $M\left(\frac{5}{4}; -3\right)$ **b)** $F\left(\frac{3}{2}; 8\right)$

c) $I\left(0; -\frac{13}{6}\right)$ **d)** $P\left(\frac{11}{2}; \frac{5}{2}\right); Q\left(-2; \frac{33}{7}\right)$.

353 Cho ba điểm A(2; 3); B(9; 4) và C(5; y).

a) Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

b) Xác định y để tam giác ABC vuông.

b) Xác định điểm P có tung độ bằng −2 và nằm trên đường thẳng AB.

Hướng dẫn

a) $\overrightarrow{CA} = (-3; 3 - y); \quad \overrightarrow{CB} = (4; 4 - y)$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = y^2 - 7y$

b) Xét các trường hợp :

+ *Tam giác ABC vuông, đỉnh C :*

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 7y = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 7 \end{array}\right.$$

Ta được hai điểm C : $C_1(5; 0)$; $C_2(5; 7)$

+ *Tam giác ABC vuông đỉnh A.*

$$\overrightarrow{AC} = (3; y - 3); \qquad \overrightarrow{AB} = (7; 1)$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad 7.3 + 1(y - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -18$$

và được điểm C(5; −18)

+ *Tam giác ABC vuông, đỉnh B :*

$$\overrightarrow{BC} = (-4; y - 4); \qquad \overrightarrow{BA} = (-7; -1)$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-7)(-4) + (-1)(y - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 32$$

Ta được điểm C(5; 32).

c) Đáp số : P(−33; −2).

354 Cho bốn điểm A(0; −3); B(3; 0); C(−3; 0); D(0; 3).

a) Tính tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.

b) Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CA

c) Xét hình dạng tam giác ABC và tứ giác ABDC.

d) Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Chứng tỏ ba điểm M, B, D thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) $\overrightarrow{AB} = (3; 3)$; $\overrightarrow{BC} = (-6; 0)$; $\overrightarrow{CA} = (3; -3)$

b) $AB = 3\sqrt{2}$; $BC = 6$; $CA = 3\sqrt{2}$

c) Tam giác ABC có AB = AC, và do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

nên $\widehat{A} = 90^0 \Rightarrow$ ΔABC vuông cân, đỉnh A (1)

Tứ giác ABDC có $\overrightarrow{AC} = (-3; 3)$; $\overrightarrow{BD} = (-3; 3) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow$ ABDC là hình bình hành (2)

Kết hợp (1) và (2) suy ra ABDC là hình thoi.

d) $M\left(\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; $\overrightarrow{MB} = \frac{3}{2}(-1; 1)$, $\overrightarrow{BD} = 3(-1; 1)$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng phương.

§3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định lí cosin

Cho tam giác có các cạnh a; b; c :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

2. Định lí sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. Công thức tính trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}; \qquad m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}; \qquad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

4. Công thức tính diện tích

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr \quad \text{với } p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(công thức Héron)}$$

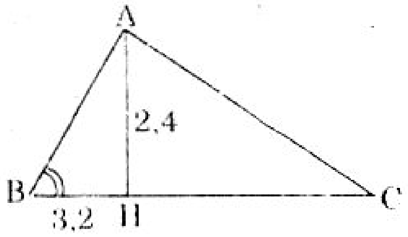
BÀI TẬP

355 Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A, đường cao AH.

Biết BC = 5cm, AH = 2,4cm.

a) Tính các cạnh AB, AC. **b)** Tính các góc B, C ?

Hướng dẫn



a) Đặt $BH = x;\ 0 \le x \le 5$

Ta có phương trình : $x(5 - x) = 2{,}4^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 5{,}76 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = 3{,}2; \quad x_2 = 1{,}8$

Từ đây ta được $AB = 3;\ AC = 4$ hoặc $AB = 4;\ AC = 3$.

b) $\sin B = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow \sin B = \dfrac{1{,}8}{3} = 0{,}6 \Rightarrow \hat{B} \approx 36^\circ 51',\quad \hat{C} \approx 53^\circ 09'$

hoặc $\hat{B} \approx 53^\circ 09',\quad \hat{C} \approx 36^\circ 51'$.

356 Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A; m_a, m_b, m_c theo thứ tự là các trung tuyến thuộc cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh hệ thức : $m_a^2 + m_c^2 = 5m_a^2$.

Hướng dẫn

Sử dụng công thức trung tuyến, lưu ý : $a^2 = b^2 + c^2$.

357 Cho tam giác ABC, các trung tuyến AM, BN vuông góc với nhau.

a) Chứng minh hệ thức $a^2 + b^2 = 5c^2$.

b) Áp dụng tính cạnh AC của tam giác ABC, biết $AB = 4$, $BC = 3$ và hai trung tuyến AM, CP vuông góc với nhau.

Hướng dẫn

a) Áp dụng công thức trung tuyến.

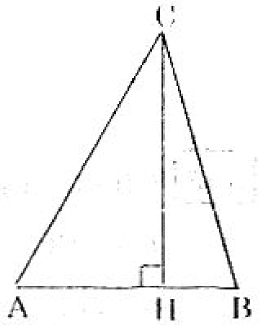
b) $AC = \sqrt{5}$.

358 Cho tam giác ABC có cạnh $AB = 3$; $AC = 4$.
Kẻ đường cao CH. Biết $AH = 2$.

a) Tính các góc A, B, C của tam giác.

b) Tính độ dài trung tuyến AM.

Hướng dẫn



a) Từ ΔAHC, ta có : $\cos A = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$

Áp dụng định lí cosin, ta có :

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 - 2.3.4.\frac{1}{2} = 13 \quad \Rightarrow \quad BC = \sqrt{13}$$

Áp dụng định lí sin :

$$\frac{\sqrt{13}}{\sin 60^0} = \frac{4}{\sin B} \quad \Rightarrow \quad \sin B = \frac{4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}} \approx 0{,}906 \quad \Rightarrow \quad \hat{B} \approx 64^0$$

Suy ra $\hat{C} \approx 56^0$.

b) Đáp số : CM = 3,5.

359 Cho tam giác ABC với 3 cạnh BC = a, CA = b, AB = c, đường tròn ngoại tiếp có bán kính R, các đường cao AD, BE, CF và trực tâm H. Chứng minh các hệ thức :

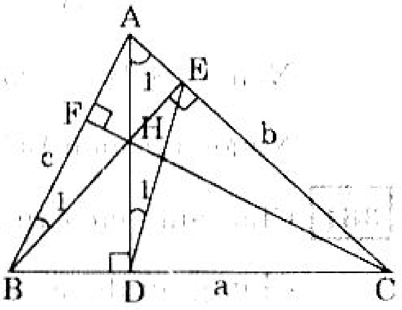
a) $c = a\cos B + b\cos A$

b) $(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C = 2p$, với $2p = a + b + c$

c) $a\sin A + b\sin B + c\sin C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$

d) $DE + EF + FD = a\cos A + b\cos B + c\cos C$.

Hướng dẫn



a) Ta có : $BF = a.\cos B$, $\quad FA = b\cos A$

$AB = BF + FA = a\cos B + b\cos A$

$\Rightarrow \quad c = a\cos B + b\cos A \qquad (1)$

b) Tương tự, ta có các hệ thức

$b = a\cos C + c\cos A \qquad (2)$

$c = a\cos B + b\cos A \qquad (3)$

Cộng (1), (2), (3) vế với vế, suy ra đpcm.

c) Từ định lí sin, ta có $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow a\sin A = \dfrac{a^2}{2R}$,

tương tự, ta có : $\quad b\sin B = \dfrac{b^2}{2R}$; $\quad c\sin C = \dfrac{c^2}{2R}$

Suy ra đpcm.

d) Trong tam giác ADE theo định lí sin ta có : $\dfrac{DE}{\sin A_1} = \dfrac{AE}{\sin D_1} \qquad (1)$

Trong tam giác vuông AEB thì $AE = AB.\sin B_1$

Tứ giác AEDB nội tiếp cho ta $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$

Từ (1) ta có $\dfrac{DE}{\sin A_1} = \dfrac{AB\sin B_1}{\sin D_1} = AB = c \quad \Rightarrow \quad DE = c.\sin A_1$ (2)

$\widehat{A}_1$ và $\widehat{C}$ là hai góc phụ nhau nên $\sin A_1 = \cos C$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra : $DE = c.\cos C$

Tương tự, ta có $EF = b.\cos B$

$FD = a.\cos A$

Suy ra đpcm.

360 Chứng minh định lí : "Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau nhưng các cạnh thứ ba không bằng nhau thì đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn và ngược lại".

Hướng dẫn

Hai tam giác ABC và A'B'C' có $AB = A'B'$, $AC = A'C'$.

Áp dụng định lí cosin, ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos B \quad (1)$$

$$B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 - 2A'B'.A'C'.\cos B' \quad (2)$$

* Nếu $\widehat{B} > \widehat{B}' \Rightarrow \cos B < \cos B'$, từ (1) và (2) ta suy ra $BC > B'C'$.

* Ngược lại, nếu $BC > B'C'$ thì từ (1) và (2) ta có $\cos B < \cos B' \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{B}'$.

361 Cho tam giác cân ABC, đỉnh A, các đường cao AH, BK.

Chứng minh các hệ thức :

a) $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{4AH^2} + \dfrac{1}{BC^2}$

b) $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3BK^2 + 2AK^2 + CK^2$.

Hướng dẫn

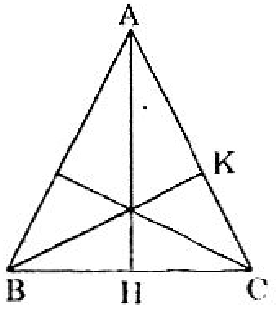
a) Ta có : $AH.BC = BK.AC \quad \Rightarrow \quad AH^2.BC^2 = BK^2.AC^2$

Mặt khác $AC^2 = \dfrac{BC^2}{4} + AH^2$

$$\Rightarrow \quad AH^2.BC^2 = BK^2\left(\frac{BC^2}{4} + AH^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad 4AH^2.BC^2 = BK^2(BC^2 + 4AH^2)$$

$\Rightarrow$ Suy ra hệ thức phải chứng minh.



b) Sử dụng định lí Pythagore : $AB^2 = BK^2 + AK^2$; $AB = AC$

$AC^2 = BK^2 + AK^2$

$BC^2 = BK^2 + CK^2$

$\Rightarrow$ Suy ra đpcm.

362 Cho M là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABC và x, y, z theo thứ tự là các khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh hệ thức : $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1.$

Hướng dẫn

So sánh diện tích các tam giác MAB với CAB

MAC với BAC

MBC với ABC.

363 Cho tam giác ABC vuông góc tại A, đường cao AH.

Kẻ $HD \perp AB$, $HE \perp AC$. Chứng minh các hệ thức :

a) $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$ **b)** $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{DB}{EC}$

c) $DE^3 = BD.CE.BC.$ **d)** $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}$.

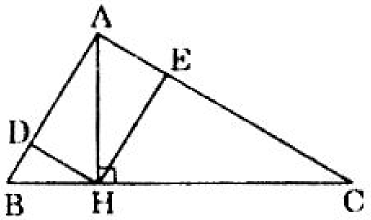
Hướng dẫn

a) Ta có : $AB^2 = HB.BC$; $AC^2 = HC.BC$. Suy ra đpcm.

b) Ta có : $DB = \frac{HB^2}{AB}$

$EC = \frac{HC^2}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{DB}{EC} = \left(\frac{HB}{HC}\right)^2 . \frac{AC}{AB} = \frac{AB^4}{AC^4} . \frac{AC}{AB} = \frac{AB^3}{AC^3}$$



c) ADHE là hình chữ nhật DE = AH.

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với $AH^3 = BD.CE.BC$

Xuất phát từ hệ thức $AH^2 = HB.HC \Rightarrow AH^4 = HB^2.HC^2$

với $HB^2 = BD.BA$ và $HC^2 = AC.CE \Rightarrow AH^4 = BD.BA.AC.CE$

$\Rightarrow AH^4 = BD.CE.BA.AC.$

Vì $BA.AC = AH.BC \Rightarrow AH^4 = AH.BC.BD.CE \Rightarrow$ Suy ra đpcm.

d) Ta có : $AB = BC.\cos B$, $BH = AB\cos B = BC\cos^2 B$

$BD = BH\cos B = BC\cos^3 B$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{BD^2} = \sqrt[3]{BC^2.\cos^6 B} = \cos^2 B\sqrt[3]{BC^2} \quad (1)$$

Tương tự, ta được : $\sqrt[3]{CE^2} = \sin^2 B\sqrt[3]{BC^2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

364 Gọi a, b, c là độ dài của các cạnh của tam giác ABC và a^2, b^2, c^2 là độ dài tương ứng của các cạnh của tam giác A'B'C'.

Chứng minh tam giác ABC là tam giác nhọn.

Hướng dẫn

Theo bất đẳng thức tam giác, vì a^2, b^2, c^2 là ba cạnh của một tam giác nên ta có $a^2 < b^2 + c^2$ (1)

Áp dụng định lí Cosin vào tam giác ABC, ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $2bc\cos A > 0 \Rightarrow \cos A > 0 \Rightarrow \hat{A} < 90^0$

Chứng minh tương tự ta có $\hat{B} < 90^0$, $\hat{C} < 90^0$ hay ABC là tam giác nhọn.

365 Cho tam giác ABC có diện tích S, bán kính đường tròn ngoại tiếp R và hệ thức sau đây được thỏa mãn

$$3S = R^2(\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)$$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn

Với a, b, c là ba cạnh của tam giác ABC ta có : $S = \dfrac{abc}{4R}$

Theo định lí sin, ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \sin^3 A = \frac{a^3}{8R^3}$$

Tương tự, ta có : $\sin^3 B = \dfrac{b^3}{8R^3}$; $\sin^3 C = \dfrac{c^3}{8R^3}$

Thế các kết quả này vào hệ thức đã cho, ta có :

$$3\frac{abc}{4R} = 2R^2\left(\frac{\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C}{8R^3}\right) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm a^3, b^3, c^3, ta có :

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3.b^3.c^3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a^3 = b^3 = c^3 \Leftrightarrow a = b = c$.

Vậy hệ thức (*) xảy ra khi a = b= c hay ABC là tam giác đều.

366 Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn hệ thức :

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A.$$

Chứng minh $\hat{A} \leq 60^0$.

Hướng dẫn

Theo định lí sin : $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \sin^2 A = \frac{a^2}{4R^2}$

Tương tự, ta có : $\sin^2 B = \frac{b^2}{4R^2}$, $\sin^2 C = \frac{c^2}{4R^2}$

Thế vào hệ thức đã cho, ta được hệ thức : $b^2 + c^2 = 2a^2$ (1)

Mặt khác $(b - c)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc$ (2)

Từ (2) và (2) ta được : $2a^2 \geq 2bc \Rightarrow a^2 \geq bc$ (3)

Theo định lí cosin thì : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (4)

Kết hợp (4) và (1) ta được : $a^2 = 2a^2 - 2bc\cos A$

$\Rightarrow 2bc\cos A = a^2 \Rightarrow \cos A = \frac{a^2}{2bc}$ (5)

Kết hợp (5) và (3) ta suy ra : $\cos A \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} \leq 60^0$.

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. ĐƯỜNG THẲNG

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Các dạng phương trình đường thẳng*

a) Phương trình tham số : *Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2)$ có phương trình tham số :*

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t. \end{cases}$$

b) Phương trình chính tắc : *Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2)$ có phương trình chính tắc :*

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

c) Phương trình tổng quát : *Đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$ có phương trình tổng quát :*

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{với} \quad A^2 + B^2 \neq 0.$$

Ngoài ba dạng cơ bản trên đây, trong thực hành giải toán, người ta còn dùng các dạng phương trình :

d) Phương trình đường thẳng có hệ số góc cho trước và có tung độ gốc cho trước

$$y = ax + b, \qquad a \text{ là hệ số góc}$$

với $a = \dfrac{a_2}{a_1} = \operatorname{tg}\alpha$; α là góc giữa Δ với chiều dương trục hoành, b là tung độ gốc.

e) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt

$$A(x_A, y_A); B(x_B, y_B) \quad \Rightarrow \quad AB : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

f) Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Chú ý :

- *Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-B; A)$ là :*

$$\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A}$$

- *Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$ là :*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

2. *Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng :* $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Xét các định thức $D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1$

$$D_x = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = B_1C_2 - B_2C_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = A_2C_1 - A_1C_2$$

a) $D \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ *Δ_1 cắt Δ_2 tại một điểm có tọa độ* $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$.

b) $D = 0$: (*) Nếu $D_x \neq 0$ (hoặc $D_y \neq 0$) $\Rightarrow$ $\Delta_1 // \Delta_2$

(*) Nếu $D_x = D_y = 0$ $\Rightarrow$ $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

3. *Khoảng cách từ 1 điểm đến đường thẳng*

$M_0(x_0; y_0)$, $\Delta = Ax + By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad d(M_0; \Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

4. *Góc giữa hai đường thẳng :* $\cos\varphi = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

BÀI TẬP

367 Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng Δ và Δ' trong các trường hợp sau :

a) $\Delta : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$; $\quad \Delta' : x - 5y - 9 = 0$

b) $\Delta : \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 + t \end{cases}$; $\quad \Delta' : -2x + 6y - 7 = 0$

c) Δ đi qua $A(-3; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 5)$

$$\Delta' : x + \frac{1}{3}y - 3 = 0 \iff 3x + y - 9 = 0.$$

Hướng dẫn

a) *CÁCH 1 :* Thế $x = -2 + 3t$; $y = 3 - 2t$ vào phương trình của Δ'

Ta có : $(-2 + 3t) - 5(3 - 2t) - 9 = 0 \iff 13t - 26 = 0 \Rightarrow t = 2$

Vậy hai đường thẳng Δ, Δ' cắt nhau, giao điểm A có toạ độ tương ứng với giá trị $t = 2$ của tham số.

Ta có : $\left.\begin{array}{l} x = -2 + 3.2 \Rightarrow x = 4 \\ y = 3 - 2.2 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow A(4; -1)$

CÁCH 2 : Đưa phương trình của Δ về dạng tổng quát, bằng cách khử t ta được : $2x + 3y + 5 = 0$ và giải hệ $\begin{cases} x - 5y - 9 = 0 \\ 2x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$

Hệ này có $D = 13$; $D_x = 52$; $D_y = -13$

b) $\Delta \parallel \Delta'$

c) $\Delta \equiv \Delta'$.

368 Cho hai đường thẳng có phương trình :

$$d_1 : \begin{cases} x = -2t \\ y = -3t \end{cases}; \qquad d_2 : \begin{cases} x = 3s + 1 \\ y = 6s + 3 \end{cases}$$

a) Xét vị trí tương đối của d_1, d_2. **b)** Tìm góc của d_1, d_2.

Hướng dẫn

a) Xét hệ $\begin{cases} -2t = 3s + 1 \\ -3t = 6s + 3 \end{cases} \Rightarrow t = 1; s = -1$

Hai đường thẳng cắt nhau tại $I(-2; -3)$.

b) $\cos\varphi \approx 0,9923 \Rightarrow \varphi \approx 7°06'$.

369 Cho hai điểm $A(2m; m - 3)$ và $B(m - 4; 2m + 1)$ trong đó m là tham số.

a) Viết phương trình đường thẳng AB.

b) Chứng tỏ đường thẳng AB có phương không đổi.

Hướng dẫn

a) AB : $x + y - 3(m + 1) = 0$

b) AB có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 1)$.

370 Viết phương trình đường thẳng Δ trong các trường hợp sau :

a) Đi qua điểm A(2; −3) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-2; 1)$.

b) Đi qua hai điểm A(−1; 2) và B(3; −4).

c) Đi qua điểm A(3; −5) và giao điểm B của hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : 2x + y + 1 = 0$$

$$\Delta_2 : 5x - 2y + 11 = 0$$

Hướng dẫn

a) Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = t - 3 \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ : $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+3}{1}$

Phương trình tổng quát của Δ : $x + 2y + 4 = 0$

b) *CÁCH 1 :* Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -6) = 2(2; -3)$

Đường thẳng AB đi qua A(−1; 2) và nhận vectơ $\vec{a} = (2; -3)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} \Leftrightarrow 3x + 2y - 1 = 0$$

CÁCH 2 : Sử dụng phương trình dạng $y = ax + b$

Đường thẳng đi qua A(−1; 2) $\Rightarrow$ $2 = a(-1) + b$ $\Rightarrow$ $a - b + 2 = 0$

B(3; −4) $\Rightarrow$ $-4 = 3a + b$ $\Rightarrow$ $3a + b + 4 = 0$

Giải hệ $\begin{cases} a - b + 2 = 0 \\ 3a + b + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\dfrac{3}{2}\,;\ b = \dfrac{1}{2}$

và được phương trình $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

CÁCH 3 : Sử dụng phương trình đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-2}{-4-2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-6} \Rightarrow 3x + 2y - 1 = 0$$

c) Giải hệ : $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 5x - 2y - 11 = 0 \end{cases}$ ta được tọa độ, giao điểm $B(1; -3)$

Phương trình đường thẳng AB : $x + y + 2 = 0$.

Chú ý : Có thể sử dụng kiến thức về chùm đường thẳng để giải câu này như sau :

Δ thuộc chùm xác định bởi Δ_1, Δ_2 nên có phương trình dạng :

$$p(2x + y + 1) + q(5x - 2y - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2p + 5q)x + (p - 2q)y + p - 11q = 0 \qquad (*)$$

Δ đi qua $A(3; -5)$ cho ta :

$$(2p + 5q).3 + (p - 2q)(-5) + p - 11q = 0 \quad \Rightarrow \quad p + 7q = 0$$

Chọn $q = -1 \Rightarrow p = 17$.

Đem thế vào phương trình (*) ta được phương trình $\Delta : x + y + 2 = 0$.

371 Viết phương trình đường thẳng Δ trong các trường hợp sau :

a) Đi qua điểm $A(3; -7)$ và song song với đường thẳng

$$\Delta' : -3x + 2y - 11 = 0$$

b) Đi qua điểm A giao điểm của hai đường thẳng $d_1 : x - 2y - 7 = 0$

$d_2 : 3x + 4y + 6 = 0$

và song song với đường thẳng $\Delta' : 11x - 2y + 17 = 0$.

Hướng dẫn

a) *CÁCH 1 :* Δ' có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-3; 2)$

Vì $\Delta // \Delta'$ nên Δ cũng nhận $\vec{n} = (-3; 2)$ làm vectơ pháp tuyến

Δ đi qua $A(3; -7)$ và có vectơ $\vec{n} = (-3; 2)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình của Δ là

$$-3(x - 3) + 2(y + 7) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y - 23 = 0$$

CÁCH 2 : Δ' có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 3)$, đây cũng là vectơ chỉ phương của Δ.

Phương trình Δ là : $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y + 7}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y - 23 = 0$

CÁCH 3 : Δ' có phương trình $3x - 2y + m = 0$ nên $\Delta // \Delta'$ có phương trình dạng $3x - 2y + m = 0$

Δ đi qua A(3; −7) cho ta : $3.3 - 2.(-7) + m = 0 \Rightarrow m = -23$

Phương trình Δ là : $3x - 2y - 23 = 0$.

b) Giải hệ $\begin{cases} x - 2y - 7 = 0 \\ 3x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$ ta được tọa độ giao điểm A(2; −3)

Kết quả : $\Delta : 11x - 2y - 28 = 0$

Chú ý : Có thể sử dụng kiến thức về chùm để giải (như bài 370).

372 Cho tam giác ABC có A(1; −2); B(−4; −5); C(−1; 3).

a) Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh.

b) Viết phương trình các đường trung tuyến AM, BN, CP.

Tìm tọa độ giao điểm G của AM, BN và nghiệm lại rằng, trong một tam giác, ba đường trung tuyến đồng quy.

Hướng dẫn

a) Phương trình đường thẳng AB :

$$\frac{x-1}{-4-1} = \frac{y+2}{-5+2} \Leftrightarrow \quad AB : \; 3x - 5y - 13 = 0$$

Tương tự, ta có $BC : 8x + 3y + 17 = 0$

$CA : 5x + 2y - 1 = 0$

b) M là trung điểm cạnh BC nên $M\left(-\frac{5}{2}; -1\right)$.

Trung tuyến AM có phương trình :

$$\frac{x+\frac{5}{2}}{1+\frac{5}{2}} = \frac{y+1}{-2+1} \Leftrightarrow \quad AM : 2x + 7y + 12 = 0$$

Tương tự, ta có $BN : 11x - 8y + 4 = 0$

$CP : 13x - y + 16 = 0$

Giao điểm G của AM, BN có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x + 7y + 12 = 0 \\ 11x - 8y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad G\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$$

Thế tọa độ của G vào phương trình của CP, ta có :

$$13\left(-\frac{4}{3}\right) - 1\left(-\frac{4}{3}\right) + 16 = \frac{-52+4}{3} + 16 = -16 + 16 = 0$$

Vậy điểm G nằm trên CP hay ba đường thẳng AM, BN, CP đồng quy tại G.

373 Tìm điểm C thuộc đường thẳng $\Delta : x - y + 2 = 0$ sao cho tam giác ABC vuông tại C, biết $A(1; -2)$; $B(-3; 3)$.

Hướng dẫn

Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$

Vì $C \in \Delta$ nên tọa độ C : $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$

$\overrightarrow{AC} = (t - 1; t + 4)$; $\quad \overrightarrow{BC} = (t + 3; t - 1)$

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ vuông tại C} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (t - 1)(t + 3) + (t + 4)(t - 1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad t_1 = 1; \quad t_2 = -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Ta được 2 điểm C : $C_1(1; 3)$; $C_2\left(-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

374 Cho ba điểm $A(-1; 1)$; $B(0; 2)$; $C(3; 1)$.

a) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và song song với BC và phương trình đường thẳng đi qua C và song song với AB.

b) Tìm tọa độ giao điểm D của Δ và Δ'.

c) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AC. Chứng minh ba điểm B, I, D thẳng hàng và I là trung điểm của đoạn thẳng BD.

Hướng dẫn

a) Ta có $\overrightarrow{BC} = (3; -1)$. Đường thẳng Δ đi qua $A(-1; 1)$ và nhận $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ chỉ phương có phương trình :

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 1}{-1} \quad \Rightarrow \quad \Delta : x + 3y - 2 = 0$$

Tương tự, ta viết được phương trình $\Delta' : x - y - 2 = 0$

b) Tọa độ giao điểm D của Δ, Δ' là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad D(2; 0)$$

c) Ta có $I(1; 1)$

$$\overrightarrow{IB} = (1; -1); \ \overrightarrow{ID} = (1; -1) \quad \Rightarrow \ \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{ID} \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

Đẳng thức này chứng tỏ I là trung điểm của đoạn thẳng BD.

Chú ý : Có thể giải câu a) như sau :

Phương trình đường thẳng BC : $\frac{x-0}{3-0} = \frac{y-2}{1-2} \Leftrightarrow$ BC : $x + 3y - 6 = 0$

Đường thẳng Δ song song với BC có phương trình : $x + 3y + m = 0$

Δ đi qua A(−1; 1) cho ta $-1 + 3.1 + m = 0 \Rightarrow m = -2$

Vậy phương trình Δ là : $x + 3y - 2 = 0$.

375 Cho hình bình hành ABCD có hai đỉnh liên tiếp là A(−1; 2); B(3; 1) và có tâm I(2; 2). Viết phương trình các cạnh và các đường chéo của hình bình hành.

Hướng dẫn

AB : $x + 4y - 7 = 0$

C là điểm đối xứng của A(−1; 2) qua I(2; 2), ta tìm được tọa độ của C(5; 2)

Cạnh CD đi qua C(5; 2) và song song với AB : $x + 4y - 7 = 0$

nên CD có phương trình dạng $x + 4y + m = 0$

Vì CD qua C(5; 2) cho ta : $5 + 2.4 + m = 0 \Rightarrow m = -13$

Phương trình của CD : $x + 4y - 13 = 0$

Tương tự, ta tìm được tọa độ của D là D(1; 3) và viết được phương trình

AD : $x - 2y + 5 = 0$

BC : $x - 2y - 1 = 0$

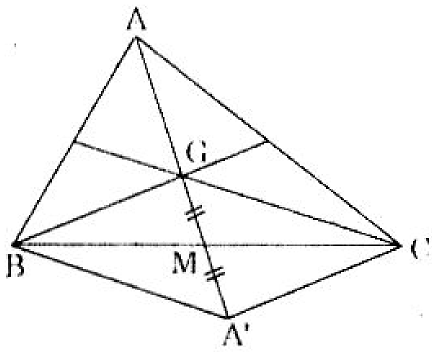
Đường chéo AC : $y - 2 = 0$

BD : $x + y - 4 = 0$.

376 Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết đỉnh A(1; 3) và hai đường trung tuyến nằm trên hai đường thẳng có phương trình :

$$d_1 : x - 2y + 1 = 0; \qquad d_2 : y - 1 = 0.$$

Hướng dẫn



Dễ thấy tọa độ đỉnh A không thỏa mãn các phương trình của d_1, d_2 nên hai trung tuyến đã cho không xuất phát từ A. Gọi G là giao điểm của d_1, d_2 thì G là trọng tâm của tam giác ABC, ta tìm được trọng tâm của ΔABC là G(1; 1).

Gọi M là trung điểm của cạnh BC ta có :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$$

Từ đây, ta được M(1; 0).

Gọi A' là điểm đối xứng của G qua M, ta tính ra A'(1; −1).

Tứ giác BGCA' là hình bình hành cho ta CA' // BG

CA' đi qua A'(1; −1) và song song với trung tuyến BG nên có phương trình : $x - 2y + m = 0$

đi qua A'(1; −1) nên $1 - 2(-1) + m = 0 \Rightarrow m = -3$

Vậy phương trình của CA' là $x - 2y - 3 = 0$. Đỉnh C là giao điểm của CA' và trung tuyến CG nên tọa độ của C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(5; 1)$$

Tương tự, ta tính được tọa độ đỉnh B(−3; −1) và viết được phương trình

AB : $x - y + 2 = 0$

BC : $x - 4y + 1 = 0$

CA : $x - 2y - 7 = 0$.

377 Cho hai điểm A, B với A(1; −3); B(3; 5). Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Hướng dẫn

CÁCH 1 : Viết phương trình đường thẳng đi qua trung điểm I của AB và vuông góc với AB

Phương trình đường thẳng AB : $\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y + 3}{5 + 3} \Rightarrow 4x - y - 7 = 0$

Trung điểm I của AB có tọa độ (2; 1).

Đường thẳng Δ vuông góc với AB có phương trình dạng $x + 4y + C = 0$

Δ đi qua I(2; 1) cho ta $2 + 4.1 + C = 0 \Rightarrow C = 6$

Vậy phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB : $x + 4y - 6 = 0$

CÁCH 2 : Sử dụng định nghĩa của đường trung trực.

Gọi M(x; y) là một điểm nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB thì $MA = MB \Rightarrow MA^2 = MB^2$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2$$

$$\Leftrightarrow x + 4y - 6 = 0.$$

378 a) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Biết ba đỉnh A(1; −4); B(3; −2); C(−1; −2).

b) Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Biết ba cạnh nằm trên ba đường thẳng : AB : $7x + 2y - 24 = 0$

BC : $6x - y - 9 = 0$

CA : $x - 3y - 10 = 0$.

Hướng dẫn

a) Ta có : Đường trung trực của cạnh AB : $x + y + 1 = 0$

Đường trung trực của cạnh BC : $x - 1 = 0$

Từ đây ta tìm được tâm $I(1; -2)$ và $R = 2$.

b) Ta tính được đỉnh $A(4; -2)$; $B(2; 5)$; $C(1; -3)$

Trung trực của AB : $4x - 14y + 9 = 0$

Trung trực của BC : $2x + 16y - 19 = 0$

Tính ra $I\left(\frac{10}{23}; \frac{47}{46}\right)$.

379 Tìm tâm và bán kính đường tròn đi qua hai điểm $A(3; 2)$, $B(-1; 4)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta : x + 2y - 7 = 0$.

Hướng dẫn

Tâm I là giao điểm của Δ với đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Đáp số : $I(1; 3)$; $R = \sqrt{5}$.

380 Cho hai điểm $A(3; 0)$, $B(-1; 8)$. Qua điểm A dựng đường thẳng Δ song song với đường thẳng $x - y = 0$.

a) Tìm trên đường thẳng Δ một điểm C sao cho tam giác ABC là tam giác cân tại đỉnh C.

b) Tìm trực tâm của tam giác ABC.

Hướng dẫn

a) C là giao điểm của Δ với trung trực của AB; $C(13; 10)$.

b) $H\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}\right)$.

381 Cho tam giác ABC biết các trung điểm của ba cạnh AB, BC, CA là các điểm $M(2; 1)$; $N(5; 3)$; $P(3; -4)$.

a) Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh.

b) Viết phương trình các đường trung trực của tam giác.

Hướng dẫn

a) Cạnh AB đi qua M(2; 1) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{NP} = (-2; -7)$ có phương trình :

$$AB : \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-7} \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 2y - 12 = 0$$

Tương tự, ta viết được $BC : 5x + y - 280$

$CA : 2x - 3y - 18 = 0.$

b) Đường trung trực của AB đi qua M(2; 1) và vuông góc với vectơ $\overrightarrow{NP}(-2; -7)$ nên nhận $\overrightarrow{NP}$ làm một vectơ pháp tuyến, có phương trình

$$-2(x-2) - 7(y-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y - 11 = 0$$

Tương tự, ta có trung trực của BC : $x - 5y + 10 = 0$

trung trực của CA : $3x + 2y - 1 = 0.$

382 Cho hai điểm A(4; 3) và B(2; 5). Tìm một điểm C để tam giác ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh C.

Hướng dẫn

Gọi tọa độ của điểm C là (x; y), ta có $\overrightarrow{CA} = (4 - x; 3 - y)$

$\overrightarrow{CB} = (2 - x; 5 - y)$

Điểm C phải thỏa mãn hai điều kiện :

$$\begin{cases} CA = CB \Rightarrow \text{C nằm trên đường trung trực của AB} \\ \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \end{cases}$$

Ta viết được phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB là $x - y + 1 = 0$ và : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (4 - x)(2 - x) + 93 - y)(5 - y) = 0$

Tọa độ của C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ (4 - x)(2 - x) + (3 - y)(5 - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 23 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được hai điểm C thỏa mãn yêu cầu đầu bài là :

$C_1(2; 3), C_2(4; 5).$

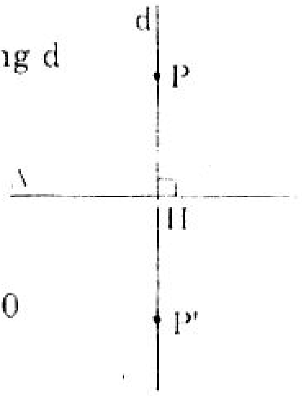
383 Cho đường thẳng $\Delta : x - 2y + 4 = 0$ và điểm P(4; 1).

a) Viết phương trình đường thẳng d đi qua P và vuông góc với Δ.

b) Tìm tọa độ điểm H, hình chiếu vuông góc của điểm P trên Δ.

c) Tìm tọa độ điểm P', đối xứng với điểm P qua đường thẳng Δ.

Hướng dẫn



a) *CÁCH 1 :* Gọi M(x; y) là một điểm thuộc đường thẳng d

ta có $\overrightarrow{PM} = (x - 4; y - 1)$

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 1)$

vì Δ ⊥ d nên $\vec{a}.\overrightarrow{PM} = 0 \Leftrightarrow 2(x - 4) + 1(y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 9 = 0$

CÁCH 2 : Δ có phương trình $x - 2y + 4 = 0$ mà $d \perp \Delta$

nên d có phương trình : $2x + y + C = 0$

Vì d đi qua P(4; 1) nên : $2.4 + 1.1 + C = 0 \Rightarrow C = -9$

Vậy phương trình của d là : $2x + y - 9 = 0$

b) H là giao điểm của d và Δ.

Tọa độ của H là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{14}{5}; \frac{17}{5}\right)$

c) Gọi (x; y) là tọa độ của P', ta có $\overrightarrow{PP'} = (x - 4; y - 1)$

$\overrightarrow{PH} = \left(-\frac{6}{5}; \frac{12}{5}\right)$

Từ $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PH}$ ta suy ra $x - 4 = -\frac{12}{5} \Rightarrow x = \frac{8}{5}$

$y - 1 = \frac{24}{5} \Rightarrow y = \frac{29}{5}$

Chú ý : Vì H là trung điểm của PP' nên có thể sử dụng công thức tọa độ trung điểm để từ các tọa độ của P, H suy ra tọa độ của P'.

384 Cho điểm A(1; 2) và đường thẳng Δ có phương trình :

$$\Delta : 4x + 2y - 13 = 0$$

a) Tìm tọa độ điểm A', đối xứng với điểm A qua đường thẳng Δ.

b) Cho đường thẳng $d : x + y - 3 = 0$

Viết phương trình đường thẳng d', đối xứng với đường thẳng d qua đường thẳng Δ.

Hướng dẫn

a) A'(3; 3)

b) d' : $7x + y - 24 = 0$.

385 Cho tam giác ABC, có ba cạnh AB, BC, CA theo thứ tự nằm trên ba đường thẳng : AB : $3x - 5y + 11 = 0$

$$BC : x - y + 3 = 0$$

$$CA : x - 3y + 9 = 0$$

Viết phương trình các đường cao AD, BE, CF.

Hướng dẫn

Đỉnh A là giao điểm của hai cạnh AB, CA nên tọa độ của A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 3x - 5y + 11 = 0 \\ x - 3y + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A(3; 4)$

Đường cao AD đi qua A(3; 4) và vuông góc với cạnh BC : $x - y + 3 = 0$ nên ta viết được phương trình AD : $x + y - 7 = 0$.

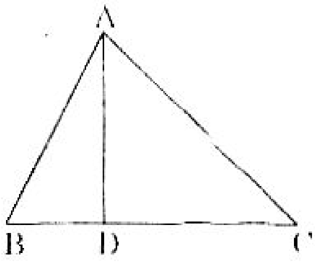
Tương tự, ta được phương trình các đường cao :

$$BE : 3x + y + 5 = 0$$

$$CF : 5x + 3y - 9 = 0$$

Chú ý : Người ta sử dụng các kiến thức về chùm đường thẳng để giải bài toán này như sau :

Đường cao AD thuộc chùm đường thẳng xác định bởi hai đường thẳng AB, AC nên phương trình của AD có dạng :



$$p(3x - 5y + 11) + 9(x - 3y + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3p + q)x - (5p + 3q)y + 11p + 9q = 0 \qquad (*)$$

AD có vectơ pháp tuyến $\vec{n'} = (3p + q; -(5p + 3q))$

BC có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1)$

Vì AD ⊥ BC nên $\quad 1(3p + q) + [-(5p + 3q)(-1)] = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 8p + 4q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2p + q = 0$$

Chọn $p = 1$, ta tính ra $q = -2$. Đem các giá trị này thế vào (*) ta được phương trình của AD : $x + y - 7 = 0$.

386 Cho tam giác ABC biết A(1; −1); B(−2; 1); C(3; 5).

a) Viết phương trình các đường cao AD, BE, CF.

b) Tìm tọa độ giao điểm H của BE, CF. Nghiệm lại rằng ba đường cao trong tam giác đồng quy tại một điểm.

Hướng dẫn

a) *CÁCH 1 :* Cạnh BC có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (5; 4)$

Gọi H(x; y) là một điểm thuộc đường cao AD thì : $\overrightarrow{AH} = (x - 1; y + 1)$

$AD \perp BC \Leftrightarrow \vec{a}.\overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow 5(x - 1) + 4(y + 1) = 0$

Ta được phương trình đường cao AD : $5x + 4y - 1 = 0$

Tương tự, ta tính được BE : $x + 3y - 1 = 0$

CF : $3x - 2y + 1 = 0$

CÁCH 2 : Cạnh BC đi qua B(−2; 1); C(3; 5).

Có phương trình $\dfrac{x + 2}{3 + 2} = \dfrac{y - 1}{5 - 1} \Leftrightarrow 4x - 5y + 13 = 0$

Đường cao $AD \perp BC$ có phương trình dạng : $5x + 4y + m = 0$

AD đi qua A(1; −1) cho ta $5(1) + 4(-1) + m = 0 \Rightarrow m = -1$

Vậy phương trình của AD là $5x + 4y - 1 = 0$.

b) Tọa độ của H, giao điểm của BE, CF là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right).$$

387 Cho tam giác ABC, biết đỉnh A(2; 2), các đường cao BH, CK có phương trình : BH : $9x - 3y - 4 = 0$

CK : $x + y - 2 = 0$

a) Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh AB, AC.

b) Tìm tọa độ các đỉnh B, C và suy ra phương trình cạnh BC.

Hướng dẫn

a) AB là đường thẳng đi qua A(2; 2) và vuông góc với CK

Ta viết được phương trình AB là $x - y = 0$

AC là đường thẳng đi qua A(2; 2) và vuông góc với BH

Ta viết được phương trình AC là $x + 3y - 8 = 0$

b) B là giao điểm của hai đường thẳng AB, BH. Tọa độ của B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 9x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

Tương tự, ta tìm được $C(-1; 3)$.

Từ đây, ta được phương trình BC : $7x + 5y - 8 = 0$.

388 Cho tam giác ABC có cạnh AB nằm trên đường thẳng AB : $5x - 3y + 2 = 0$. Các đường cao AH, BK nằm trên các đường thẳng :

$$AH : 4x - 3y + 1 = 0; \qquad BK : 7x + 2y - 22 = 0$$

Viết phương trình các cạnh AC, BC và đường cao CI.

Hướng dẫn

- Đỉnh A là giao điểm của AB, AH. Từ đây, ta tìm được tọa độ của A là $(-1; -1)$.
- Đỉnh B là giao điểm của AB, BK. Ta tìm được $B(2; 4)$.
- AC đi qua $A(-1; -1)$ và vuông góc với BK.

  Phương trình của AC là $2x - 7y - 5 = 0$.
- BC đi qua $B(2; 4)$ và vuông góc với AH.

  Phương trình của BC là $3x + 4y - 22 = 0$.

  Đỉnh C là giao điểm của BC và AC. Ta tính ra $C(6; 1)$.
- Đường cao CI đi qua $C(6; 1)$ và vuông góc với AB.

  Phương trình của CI là : $3x + 5y - 23 = 0$.

389 Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC, biết $B(-4; -5)$ và hai đường cao có phương trình :

$$5x + 3y - 4 = 0; \qquad 3x + 8y + 13 = 0.$$

Hướng dẫn

Vì tọa độ của B không thỏa mãn các phương trình đã cho nên các đường cao có phương trình trên đây không xuất phát từ đỉnh B.

Giả sử đường cao có phương trình $5x + 3y - 4 = 0$ xuất phát từ đỉnh C.

- AB đi qua $B(-4; -5)$ và vuông góc với $5x + 3y - 4 = 0$, ta viết được phương trình AB : $3x - 5y - 13 = 0$.
- BC đi qua $B(-4; -5)$ và vuông góc với $3x + 8y - 13 = 0$, ta viết được phương trình BC : $8x - 3y + 17 = 0$.

Đỉnh A là giao điểm của AB với đường thẳng $3x + 8y + 13 = 0$ do đó ta tính ra A(1; −2).

- Đỉnh C là giao điểm của BC với đường thẳng $5x + 3y - 4 = 0$ do đó ta tính ra C(−1; 3).

Từ đây, ta tính được phương trình AC : $5x + 2y - 1 = 0$.

390 Cho tam giác ABC, biết A(3; −4) và hai đường cao có phương trình

$$7x - 2y - 1 = 0; \qquad 2x - 7y - 6 = 0.$$

Viết phương trình các cạnh của tam giác.

Hướng dẫn

Đáp số : $2x + 7y + 22 = 0$; $7x + 2y - 13 = 0$; $x - y + 2 = 0$.

391 Cho tam giác ABC biết :

Cạnh AB nằm trên đường thẳng $4x + y - 12 = 0$

Đường cao BH nằm trên đường thẳng $5x - 4y - 15 = 0$

Đường cao AH nằm trên đường thẳng $2x + 2y - 9 = 0$

Viết phương trình hai cạnh còn lại và đường cao thứ ba.

Hướng dẫn

Đáp số : AC : $4x + 5y - 20 = 0$

BC : $x - y - 3 = 0$

CH : $3x - 12y - 1 = 0$.

392 Cho tam giác ABC có đỉnh B(3; 5) và đường cao AH nằm trên đường thẳng Δ : $2x - 5y + 3 = 0$; đường trung tuyến kẻ từ đỉnh C có phương trình $x + y - 5 = 0$.

a) Tìm tọa độ đỉnh A.

b) Viết phương trình các cạnh của tam giác.

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** A(1; 1) **b)** AB : $2x - y - 1 = 0$

BC : $5x + 2y - 25 = 0$

CA : $x + 4y - 5 = 0$.

393 Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC biết đỉnh B(2; −1); đường cao AH : $3x - 4y + 27 = 0$ và phân giác CD : $x + 2y - 5 = 0$.

Hướng dẫn

Cạnh BC đi qua đỉnh $B(2; -1)$ và vuông góc với $AH : 3x - 4y + 27 = 0$ có phương trình $4x + 3y - 5 = 0$

Đỉnh C là giao điểm của $CD : x + 2y - 5 = 0$ và $BC : 4x + 3y - 5 = 0$

$\Rightarrow C(-1; 3)$.

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua phân giác CD thì $B' \in AC$

Ta có $B'(4; 3)$

Cạnh AC nằm trên đường thẳng CC' nên có phương trình $y - 3 = 0$.

Đỉnh A là giao điểm của cạnh AC và đường cao AH nên ta tính được $A(-5; 3)$.

Cạnh AB đi qua $A(-5; 3)$; $B(2; -1)$ có phương trình $4x + 7y - 1 = 0$.

394 Cho hai điểm $A(0; 4)$ và $B(5; 0)$ và đường thẳng $\Delta : 2x - 2y + 1 = 0$

a) Tìm tọa độ các điểm A' và B' theo thứ tự là các điểm đối xứng của điểm A và điểm B qua đường thẳng Δ.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng BA', B'A và Δ đồng quy tại một điểm M.

Hướng dẫn

a) $A'\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$; $B'\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{11}{2}\right)$

b) – Phương trình của $A'B : x + 3y - 5 = 0$

– Phương trình của $B'A : 3x + y - 4 = 0$

Giao điểm của Δ với BA' là điểm M, có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{8}; \frac{11}{8}\right)$$

Tọa độ của M thỏa mãn phương trình của B'A :

$$3.\frac{7}{8} + \frac{11}{8} - 4 = 0 \Rightarrow M \in B'A.$$

395 Cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1; 3)$ và đường cao BH nằm trên đường thẳng $x - y = 0$, phân giác trong của góc C nằm trên đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$. Viết phương trình cạnh BC.

Hướng dẫn

Gọi K là điểm đối xứng của điểm H qua phân giác $x + 3y + 2 = 0$

Ta có $K \in BC$

Ta tính được $K\left(-\frac{1}{5}; \frac{-13}{5}\right)$

AC đi qua $A(-1; 3)$ và vuông góc với BH nên có phương trình

$$1(x + 1) + 1(y - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 2 = 0$$

Ta tính được tọa độ $C(7; -5)$.

Đường thẳng BC (cũng là đường thẳng CK) có phương trình

$$x - 7y - 18 = 0.$$

396 Cho tam giác ABC biết đỉnh $A(2; -1)$ và 2 phân giác

$$BD : \ x - 2y + 1 = 0; \qquad CE : \ x + y + 3 = 0$$

Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC, CA, AB.

Hướng dẫn

Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua phân giác BD thì $A_1 \in BC$.

Ta tính được $A_1(0; 3)$

A_2 là điểm đối xứng của A qua phân giác CE thì $A_2 \in BC$.

Ta tính được $A_2(-2; -5)$

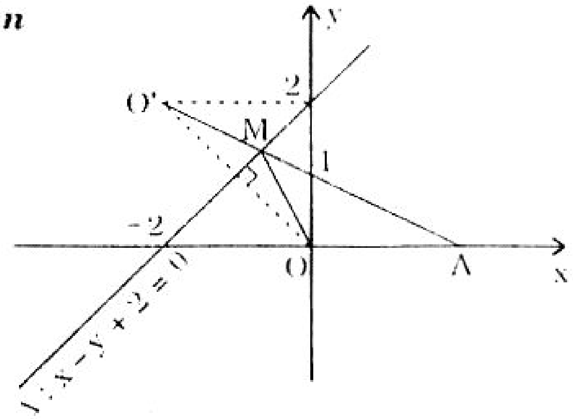
Cạnh BC đi qua hai điểm A_1, A_2 có phương trình $4x - y + 3 = 0$

Đỉnh B là giao điểm của BC và BD. Ta tìm được $B\left(-\frac{5}{7}; \frac{1}{7}\right)$ và viết được phương trình cạnh AB là : $8x + 19y + 3 = 0$

Tương tự, ta viết được phương trình AC là : $x - 4y - 6 = 0$.

397 Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm $A(2; 0)$ và đường thẳng Δ có phương trình : $\Delta : x - y + 2 = 0$. Tìm trên Δ một điểm M sao cho đường gấp khúc OMA có độ dài ngắn nhất.

Hướng dẫn



Gọi O' là điểm đối xứng của O qua Δ, ta có :

$$OM = O'M$$

$$OM + MA = O'M + MA$$

$$\Rightarrow \quad OM + MA = O'A$$

$$\Rightarrow \quad OM + MA \text{ ngắn nhất}$$

Ta tìm được $O'(-2; 2)$

$O'A$ có phương trình $x + 2y - 2 = 0$

M là giao điểm của $O'A$ và Δ. Ta tính được $M\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

398 Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2; 1)$ và tạo với đường thẳng $d : 2x + 3y + 1 = 0$ một góc 45^0.

Hướng dẫn

Gọi hệ số góc của đường thẳng Δ đi qua $M(2; 1)$ là k thì phương trình của Δ là :

$$\Delta : y - 1 = k(x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad kx - y - 2k + 1 = 0 \qquad (*)$$

Theo bài ra, ta có : $\dfrac{|2k + 3.(-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2}\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \cos 45^0$

$$\Rightarrow \quad \frac{|2k - 3|}{\sqrt{13}\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được phương trình bậc hai

$$2k^2 + 24k - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = \frac{1}{5}; k_2 = -5$$

Đem thế vào (*) ta có

- Với $k = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \Delta_1 : x - 5y + 3 = 0$
- Với $k = -5 \Rightarrow \Delta_2 : 5x + y - 11 = 0$.

399 Chứng minh rằng, tam giác ABC có ba cạnh nằm trên ba đường thẳng

$AB : x + y - 6 = 0,$

$BC : 4x - y - 19 = 0$

$CA : x - 4y + 14 = 0,$ là tam giác cân.

Hướng dẫn

Ta có hai cách giải :

CÁCH 1 : Tìm tọa độ các đỉnh, ta được : $A(2; 4)$, $B(5; 1)$, $C(6; 5)$

$AC^2 = (6 - 2)^2 + (5 - 4)^2 = 17$

$BC^2 = (6 - 5)^2 + (5 - 1)^2 = 17$

$AC^2 = BC^2 \Rightarrow AC = BC \Rightarrow \Delta ABC$ cân, đỉnh C

CÁCH 2 : Ta có $\cos A = \dfrac{|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$

$$\cos B = \frac{|\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$\cos A = \cos B \Rightarrow A = B \Rightarrow \Delta ABC$ cân, đỉnh C.

400 Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết đỉnh $B(2; -1)$, đường cao $AH : 3x - 4y + 27 = 0$ và phân giác $CD : x + 2y - 5 = 0$.

Hướng dẫn

Cạnh BC đi qua B và vuông góc với AH nên có phương trình

$$4x + 3y - 5 = 0$$

Tọa độ của C là $(-1; 3)$

Gọi K là hệ số góc của AC.

Phương trình AC : $y - 3 = k(x + 1) \Leftrightarrow kx - y + k + 3 = 0$ (*)

Ta có : $\cos C_1 = \dfrac{|1.4 + 2.3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$\cos C_2 = \frac{|k - 2|}{\sqrt{k^2 + 1}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|k - 2|}{\sqrt{3}\sqrt{k^2 + 1}}$$

Suy ra $\dfrac{k - 2}{\sqrt{3}\sqrt{k^2 + 1}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3k^2 + 4k = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0; k_2 = -\dfrac{4}{3}$

Thế vào (*) ta được phương trình AC : $y - 3 = 0$

phương trình BC : $4x + 3y - 5 = 0$

Tọa độ đỉnh $A(-5; 3)$

Phương trình AB : $4x + 7y - 1 = 0$.

401 Cho hình vuông ABCD có đỉnh $A(-4; 5)$ và một đường chéo nằm trên đường thẳng $7x - y + 8 = 0$.

Lập phương trình các cạnh và đường chéo còn lại.

Hướng dẫn

Do tọa độ điểm A không thỏa mãn phương trình $7x - y + 8 = 0$ nên $7x - y + 8 = 0$ là phương trình của đường chéo BD.

Đường chéo AC đi qua đỉnh A và vuông góc với BD nên ta viết được phương trình AC : $x + 7y - 31 = 0$

Gọi hệ số góc của AB là k, phương trình AB là :

$$y - 5 = k(x + 4) \Leftrightarrow kx - y + 4k + 5 = 0 \quad (*)$$

AB tạo với đường chéo AC một góc 45° nên ta có :

$$\cos45^0 = \frac{|k - 7|}{\sqrt{k^2 + 1}.\sqrt{1^2 + 7^2}} \Rightarrow \frac{|k - 7|}{\sqrt{50}\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được phương trình

$$12k^2 + 7k - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \frac{3}{4} \\ k_2 = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Thế các giá trị k_1, k_2 vào phương trình (*) ta được phương trình của hai cạnh AB, AD là : $3x - 4y + 32 = 0$

$$4x + 3y + 1 = 0$$

Ta tìm được tâm I của hình vuông (giao điểm của AC và BD) là $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Đỉnh C đối xứng với đỉnh A qua I nên ta tìm được C(3; 4).

Từ đây ta viết được phương trình cạnh CD (đi qua C và song song với AB) : BC : $3x - 4y + 7 = 0$

CB là đường thẳng đi qua C và song song với AD nên ta viết được phương trình CD là $4x + 3y + 1 = 0$.

402 Đáy của một tam giác cân nằm trên đường thẳng Δ : $x + 2y = 0$.

Một cạnh bên có phương trình $x - y + 5 = 0$ và cạnh bên còn lại đi qua điểm M(4; 2). Viết phương trình cạnh còn lại.

Hướng dẫn

Gọi k là hệ số góc của cạnh bên cần tìm, phương trình đường thẳng chứa cạnh này là :

$$\Delta' : y - 2 = k(x - 4) \Leftrightarrow kx - y - 4k + 2 = 0 \quad (*)$$

Góc giữa cạnh đáy $x + 2y = 0$ và cạnh bên $x - y + 5 = 0$ là :

$$\cos\varphi = \frac{|1.1 - 2.(-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}.\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}.\sqrt{2}}$$

Góc giữa cạnh bên còn lại với cạnh đáy x + 2y = 0 là

$$\cos(\Delta; \Delta') = \frac{|k.1 + 2(-1)|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}.\sqrt{5}}$$

Tam giác đã cho là tam giác cân nên :

$$\cos(\Delta; \Delta') = \cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|k-2|}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}.\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được phương trình

$$k^2 - 8k + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = 7 \end{array}\right.$$

Thay các giá trị này vào phương trình (*) ta được các phương trình :

$$\Delta_1 : x - y - 2 = 0$$

$$\Delta_2 : 7x - y - 26 = 0$$

Rõ ràng Δ_1 là đường thẳng qua M và song song với cạnh x - y + 5 = 0

Vậy phương trình của cạnh còn lại là $\Delta_2 : 7x - y - 26 = 0$.

403 Trong mặt phẳng Oxy viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d : 3x - 4y + 1 = 0 và có khoảng cách đến d bằng 1.

Hướng dẫn

Gọi Δ là đường thẳng song song với đường thẳng d thì phương trình của Δ là 3x - 4y + C = 0

Ta biết, khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách giữa một điểm thuộc một trong hai đường thẳng đến đường thẳng kia, do đó ta lấy một điểm bất kì M, thuộc d, chẳng hạn M(1; 1) ∈ d.

Khoảng cách từ M đến Δ là :

$$d(M; \Delta) = \frac{|3.1 - 4.1 + m|}{\sqrt{3^2+4^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|m-1|}{5}$$

Khoảng cách này phải bằng 1, cho ta :

$$\frac{|m-1|}{5} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |m-1| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad m = 6;\ m = -4$$

Và ta được hai đường thẳng cần tìm $\Delta_1 : 3x - 4y + 6 = 0$

$\Delta_2 : 3x - 4y - 4 = 0.$

404 Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm P(2; 7) và cách điểm Q(1; 2) một khoảng bằng 1.

Hướng dẫn

Xét đường thẳng $\Delta : x - 2 = 0$. Khoảng cách từ Q đến Δ là

$$d(Q; \Delta) = |1 - 2| = 1$$

Vậy đường thẳng $\Delta : x - 2 = 0$ thỏa mãn điều kiện qua P (2; 7) và cách Q một khoảng bằng 1.

Ngoài đường thẳng Δ, phương trình đường thẳng Δ' qua P, với hệ số góc k là :

$$\Delta' : y - 7 = k(x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad kx - y - 2k + 7 = 0 \quad (*)$$

Ta có : $d(Q; \Delta) = \dfrac{|k.1 + (-2).1 - 2k + 7|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \dfrac{|-k + 5|}{\sqrt{k^2 + 1}}$

Theo bài ra ta có :

$$\frac{|-k + 5|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |-k + 5| = \sqrt{k^2 + 1}$$

Bình phương cả hai vế, ta đưa về phương trình

$$10k - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{12}{5}.$$

Thế vào (*) ta được phương trình $\Delta' : 12x - 5y + 11 = 0$.

Kết quả : Ta được hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$\Delta : x - 2 = 0 \quad \text{và} \quad \Delta' : 12x - 5y + 11 = 0.$$

405 Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A(1; −2) và cách điểm B(−1; 1) một khoảng bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn

Ta có 2 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu :

$$\Delta_1 : 2x + y = 0$$

$$\Delta_2 : 22x + 19y + 16 = 0.$$

406 Tìm trên đường thẳng $\Delta : 2x + y - 1 = 0$ những điểm có khoảng cách bằng 2 đến đường thẳng $d : 4x + 3y - 10 = 0$.

Hướng dẫn

Ta có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu :

$$M_1\left(-\frac{17}{2}; 18\right) \text{ và } M_2\left(\frac{3}{2}; 2\right).$$

407 Tìm trên đường thẳng $\Delta : 4x + 3y - 12 = 0$ những điểm cách đều hai điểm $A(-1; -2)$ và $B(1; 4)$.

Hướng dẫn

$M(3; 0)$.

408 Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng

$d : 2x + 6y - 3 = 0$ và cách điểm $P(5; 4)$ một khoảng bằng $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn

Ta có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu

$$\Delta_1 : 3x - y - 21 = 0$$

$$\Delta_2 : 3x - y - 1 = 0.$$

409 Viết phương trình đường thẳng cách điểm $A(1; 1)$ một khoảng bằng 1 và cách điểm $B(2; 3)$ một khoảng bằng 4.

Hướng dẫn

Ta có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu :

$$\Delta_1 : y + 1 = 0$$

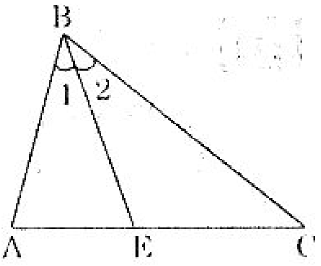
$$\Delta_2 : 4x + 3y + 3 = 0.$$

410 Cho tam giác ABC biết $A(4; -13)$; $B(4; 12)$; $C(-8; 3)$

Viết phương trình đường phân giác trong góc B.

Hướng dẫn

CÁCH 1 : Áp dụng định lí về tính chất của đường phân giác trong : "Chân của phân giác trong của một góc thì chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh bên".



Gọi E là chân đường phân giác trong góc B, ta có

$$\frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}$$

Ta có : $AB^2 = (4-4)^2 + (12+13)^2 = 625 \Rightarrow AB = 25$

Tương tự, ta có $BC = 15 \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{5}{3}$

E là điểm chia AC theo tỉ số $k = -\dfrac{5}{3}$. Theo công thức tính tọa độ điểm chia đoạn thẳng theo một tỉ số ta có tọa độ của E.

$$x_E = \frac{4+\frac{5}{3}.(-8)}{1+\frac{5}{3}} = -\frac{7}{2}; \qquad y_E = \frac{-13+\frac{5}{3}-3}{1+\frac{5}{3}} = -3$$

Phân giác BE đi qua B(4; 12) và $E\left(-\frac{7}{2}; -3\right)$ có phương trình :

$$\frac{x-4}{-\frac{7}{2}-4} = \frac{y-12}{-3-12} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y + 4 = 0$$

CÁCH 2 : Từ giả thiết, ta tìm được phương trình ba cạnh :

$AB : x - 4 = 0$

$BC : 3x - 4y + 36 = 0$

$CA : 4x + 3y + 23 = 0$

Phương trình hai đường phân giác của các góc do hai đường thẳng AB, BC tạo thành :

$$\frac{x-4}{1} = \pm\frac{3x-4y+36}{5}$$

$$\Rightarrow \quad d_1 = 2x - y + 4 = 0$$

$$d_2 = x + 2y - 28 = 0$$

Thế tọa độ của A(4; −13) vào phương trình d_1 : $2.4 + 13 + 4 = 25 > 0$

Thế tọa độ của C vào phương trình d : $2.(-8) - 3 - 28 = -47 < 0$.

Vậy hai điểm A, C nằm về hai phía đối với đường thẳng d_1 hay d_1 chính là phân giác trong của góc B.

411 a) Cho tam giác ABC với A(1; 1); B(10; 13); C(13; 6).

Viết phương trình phân giác trong của góc A.

b) Cho tam giác ABC với các cạnh nằm trên các đường thẳng :

$AB : 3x - 4y + 12 = 0$

$BC : 2x + y + 8 = 0$

$CA : 5x - 3y - 2 = 0$

Viết phương trình phân giác trong của góc C.

Hướng dẫn

a) $7x - 9y + 12 = 0$ **b)** $7x + y + 18 = 0$.

412 a) Cho tam giác ABC biết A(1; 5), B(−4; −5); C(4; −1).

Viết phương trình phân giác trong của góc A và tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp trong tam giác.

b) Cho tam giác ABC có ba cạnh nằm trên ba đường thẳng

$$d_1 : 4x - y + 2 = 0$$

$$d_2 : x - 4y - 8 = 0$$

$$d_3 : x + 4y - 8 = 0$$

Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp trong tam giác.

Hướng dẫn

a) $x - 1 = 0$; $I(1; 0)$ **b)** $I\left(\frac{6}{5}; 0\right)$; $R = \frac{2}{5}\sqrt{17}$.

413 Cho tam giác ABC với ba cạnh có phương trình

$$AB : 2x - y + 2 = 0$$

$$BC : x - 2y - 5 = 0$$

$$CA : 2x + y - 10 = 0.$$

a) Xác định hình dạng của tam giác.

b) Viết phương trình phân giác trong của góc B.

c) Tìm tọa độ tâm I đường tròn nội tiếp trong tam giác.

Hướng dẫn

a) Tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A.

b) $3x - 4y - 3 = 0$

c) $I(2; 1)$.

414 Cho họ đường thẳng Δ_m có phương trình

$$\Delta_m : (m - 3)x - (m - 2)y + m - 1 = 0.$$

a) Tìm tọa độ điểm cố định A mà họ đường thẳng đi qua khi m thay đổi.

b) Tìm các giá trị của m để ta có :

+ Đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

+ Đường thẳng đi qua điểm $B(2; -1)$.

+ Đường thẳng song song với đường thẳng $(d) : x + 3y + 4 = 0$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $(m-3)x-(m-2)y+m+1=0$

$\Leftrightarrow \quad (x-y+1)m+(3x-2y+1)=0$

Tọa độ điểm cố định A mà họ đường thẳng luôn đi qua là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 3x-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad A(1;\,2)$$

b) Đáp số : + $m=1$

+ $m=\dfrac{9}{4}$; $\quad 3x+y-5=0.$

+ $m=\dfrac{11}{4}$; $\quad x+3y-7=0.$

415 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho họ đường thẳng Δ_m có phương trình

$\Delta_m : (m+2)x+(m-1)y-3=0,$ $\quad$ m là tham số.

a) Chứng tỏ đường thẳng của họ Δ_m luôn đi qua một điểm cố định A. Tìm tọa độ điểm A.

b) Biện luận theo m, vị trí tương đối của các đường thẳng Δ_m với các đường thẳng thuộc họ Δ'_m.

$$\Delta'_m : 2(m-1)x+y-2=0$$

c) Trong trường hợp hai đường thẳng Δ và Δ' cắt nhau tại một điểm P, tìm một hệ thức độc lập giữa các tọa độ của P đối với tham số m, từ đó suy ra quỹ tích giao điểm P khi m thay đổi.

Hướng dẫn

a) $A(1;\,1)$.

b) $m \neq 0$ và $m \neq \dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta'_m$ và Δ_m cắt nhau

$m=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_1 \,//\, \Delta_2$

$m=\dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta_1=\Delta_2.$

c) Khi Δ', Δ_m cắt nhau tại I thì $x=\dfrac{1}{m}$; $y=\dfrac{2}{m}$

Khử m, ta đi đến phương trình quỹ tích I : $2x-y=0$.

416 Cho hai đường thẳng : $\Delta_1 : kx - y + k = 0$

$$\Delta_2 : (1 - k^2)x + 2ky - (1 + k^2) = 0$$

a) Tìm điểm cố định của Δ_1.

b) Chứng minh Δ_1, Δ_2 luôn cắt nhau. Tìm tọa độ giao điểm I.

c) Tìm quỹ tích của I khi k thay đổi.

Hướng dẫn

a) Δ_1 đi qua $A(-1; 0)$

b) Ta có $D = 1 + k^2 \neq 0 \ \forall k \quad \Rightarrow \quad \Delta_1, \Delta_2$ luôn cắt nhau

$$I\left(\frac{1 - k^2}{1 + k^2}; \frac{2k}{1 + k^2}\right)$$

c) Khử k, ta đi đến phương trình quỹ tích I : $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

417 Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình :

$$\Delta_1 : x + my - 1 = 0$$

$$\Delta_2 : mx - 3my - 2m - 3 = 0$$

a) Tùy theo giá trị m, biện luận vị trí tương đối của hai đường thẳng.

b) Trường hợp hai đường thẳng cắt nhau, chứng minh rằng khi m thay đổi thì giao điểm của hai đường thẳng luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

a) Xét hệ : $\begin{cases} x + my - 1 = 0 \\ mx - 3my - 2m - 3 = 0 \end{cases}$

Ta có định thức $D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & -3m \end{vmatrix} = -m(m + 3)$

(*) Với $m \neq 0$ và $m \neq -3 \Rightarrow D \neq 0$ hệ có 1 nghiệm duy nhất

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm.

(*) Với m = 0 hệ có dạng $\begin{cases} x + 0y = 1 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm $\Rightarrow$ hai đường thẳng song song với nhau.

(*) Với m = –3 hệ có dạng $\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ -3x + 9y + 3 = 0 \end{cases}$

Vì $\frac{1}{-3} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$ $\Rightarrow$ hệ vô số nghiệm $\Rightarrow$ hai đường thẳng trùng nhau.

b) Với $m \neq 0$ và $m \neq -3$, hai đường thẳng cắt nhau tại điểm M có tọa độ $x = 2;\ y = -\frac{1}{m}$

Như vậy, M luôn nằm trong đường thẳng $x - 2 = 0$.

418 Cho tứ giác ABCD có bốn cạnh nằm trên các đường thẳng

AB : $3x - y - 13 = 0$

BC : $x + y - 7 = 0$

CD : $x - 3y + 17 = 0$

DA : $9x + 5y - 7 = 0$

Gọi M, N, P, Q, I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA, AD và hai đường chéo AC, BD.

Chứng minh ba đường thẳng MP, NQ, IJ đồng quy.

Hướng dẫn

Ta có phương trình của MP : $13x + 9y - 13 = 0$

NQ : $5x + y - 11 = 0$

IJ : $7x - 5y - 1 = 0$

Hệ $\begin{cases} 13x + 9y - 13 = 0 \\ 5x + y - 11 = 0 \\ 7x - 5y - 1 = 0 \end{cases}$ có một nghiệm duy nhất $\left(\frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right)$

Vậy ba đường thẳng đồng quy tại điểm $\left(\frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right)$.

419 Cho ba đường thẳng $\Delta_1 : 3x - 4y + 15 = 0$

$\Delta_2 : 12x + 9y - 15 = 0$

$\Delta_3 : mx - (2m - 1) + 9m - 13 = 0$

a) Tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng quy.

b) Với giá trị nào của m thì Δ_3 song song với phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 ?

Hướng dẫn

a) Tọa độ giao điểm I của Δ_1, Δ_2 là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x - 4y + 15 = 0 \\ 12x + 9y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad I(-1;\, 3)$$

Để Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng quy thì Δ_3 phải đi qua I, cho ta

$$m(-1) - (2m - 1).3 + 9m - 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 5$$

Lúc bấy giờ, ta được phương trình Δ_3 là : $5x - 9y + 32 = 0$.

b) Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 giao nhau tạo thành bốn góc, phương trình của hai đường phân giác là :

$$\frac{|3x - 4y + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|12x + 9y - 15|}{\sqrt{12^2 + 9^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 : x + 7y - 20 = 0$$

$$p_2 : 7x - y - 10 = 0$$

Để Δ_3 song song với p_1 : $\frac{m}{1} = \frac{-(2m - 1)}{7} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{9}$

Với giá trị $m = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{9m - 13}{-20} \neq \frac{m}{1}$ nên Δ // p_1

Tương tự để Δ_3 // p_2 thì $m = \frac{7}{13}$.

§2. ĐƯỜNG TRÒN

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình tổng quát

Đường tròn tâm I(a; b) bán kính R có phương trình tổng quát

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Với $R^2 = a^2 + b^2 - c$

Chú ý : *Có nhiều tác giả viết phương trình tổng quát của đường tròn dưới dạng* $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$

Dưới dạng này, tâm $I(-A;\, -B)$ *và* $R^2 = A^2 + B^2 - C$.

2. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn tại điểm thuộc đường tròn

$$x_0x + y_0y - a(x + x_0) - b(y_0 + y) + c = 0$$

hoặc $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$

hoặc $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$

3. Điều kiện tiếp xúc của đường thẳng với đường tròn

Điều kiện để đường thẳng $\Delta : Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính R là :

$$\frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R$$

BÀI TẬP

420 Các đường cong có phương trình sau đây, đường cong nào là đường tròn, đường cong nào không phải là đường tròn.

a) $x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$ **b)** $5x^2 + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 3x - 2y + 14 = 0$ **d)** $2x^2 + 3y^2 + 3x - 2y + 7 = 0$

e) $x^2 - y^2 + 3xy + 2x + y - 10 = 0$.

Hướng dẫn

Để một đường cong là đường tròn thì phương trình của đường cong ấy phải :

- Có hệ số của các hạng tử x^2, y^2 bằng nhau
- Không có hạng tử x, y
- Biểu thức $a^2 + b^2 - c > 0$

Như vậy a), b) là phương trình của các đường tròn.

421 Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của các đường tròn :

a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ **b)** $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y + 2 = 0$

c) $9x^2 + 9y^2 + 6x - 12y\ 5 = 0$ **d)** $x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$.

Hướng dẫn

Tâm I(a; b), bán kính $R^2 = a^2 + b^2 - c$

Đáp số : **a)** $I(1; -3)$; $R = 2$; **b)** $I\left(\frac{1}{2}; -2\right)$; $R = \frac{3}{2}$

c) $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$; $R = \frac{5\sqrt{3}}{2}$; **d)** I)5; –12); R = 15;

e) $I(1; -1)$; $R = 1$.

422 Viết phương trình đường tròn có tâm I(5; 5) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x + 4y - 5 = 0$

Hướng dẫn

Ta có : $R = d(I; \Delta) = \dfrac{|3.5 + 4.5 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{30}{5} = 6$

Phương trình cần tìm

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 10x - 10y + 14 = 0.$$

423 Viết phương trình đường tròn có bán kính R = 1, tiếp xúc với trục Ox và có tâm ở trên đường thẳng $\Delta : 3x - y + 7 = 0$.

Hướng dẫn

Tâm I có tung độ $y = \pm 1$, nên có các hoành độ, tương ứng

+ $y = 1 \Rightarrow x = -2$: Phương trình đường tròn cần tìm là :

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$$

+ $y = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{8}{3}$: Phương trình đường tròn cần tìm là :

$$\left(x + \frac{8}{3}\right)^2 + (y + 1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 9x^2 + 9y^2 + 48x + 98y + 64 = 0.$$

424 Viết phương trình đường tròn có tâm I(−1; 3) và tiếp xúc với đường thẳng AB, với A(3; 4); B(−6; 1).

Hướng dẫn

Đáp số : $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = \dfrac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 10x^2 + 10y^2 + 20x - 60y + 99 = 0.$

425 Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A(2; 0), B(0; 1) và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta : x + 2y - 3 = 0$.

Hướng dẫn

Tâm I của đường tròn là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng AB với Δ.

Đường trung trực của đoạn thẳng AB : $d : 4x - 2y - 3 = 0$

Tọa độ tâm I của đường tròn là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 4x - 2y - 3 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{6}{5};\ y = \frac{9}{10}$$

Bán kính R = IA $\quad \Rightarrow \quad R^2 = \left(2 - \dfrac{6}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{10}\right)^2 = \dfrac{145}{100}$

Phương trình đường tròn : $\left(x - \dfrac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{9}{10}\right)^2 = \dfrac{145}{100}$

$$\Leftrightarrow \quad 100x^2 + 100y^2 - 240x - 180y + 225 = 0$$

426 Viết phương trình đường tròn nhận đoạn thẳng AB làm đường kính với A(2; 1); B(0; 2).

Hướng dẫn

CÁCH 1 : Tâm I là trung điểm của AB : $I = \left(1; \frac{3}{2}\right)$

Bán kính $R = \frac{AB}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Phương trình đường tròn :

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 3y + 2 = 0$$

CÁCH 2 : Gọi M(x; y) là một điểm thuộc đường tròn đường kính AB

ta có : $\overrightarrow{MA} = (2 - x; 1 - y)$, $\overrightarrow{MB} = (-x; 2 - y)$

AB là đường kính nên $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$$\Leftrightarrow (2 - x)(-x) + (1 - y)(2 - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3y + 2 = 0.$$

427 Viết phương trình đường tròn nhận đoạn thẳng AB làm đường kính với A(–3; 1); B(2; 5).

Hướng dẫn

Đáp số : $x^2 + y^2 + x - 6y - 1 = 0.$

428 Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A(1; –1); B(5; 1) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 2x - y - 2 = 0$.

Hướng dẫn

Đáp số : $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0.$

429 Viết phương trình đường tròn có tâm I(–3; 1) và tiếp xúc với đường thẳng đi qua hai điểm A(3; 2); B(–1; 4).

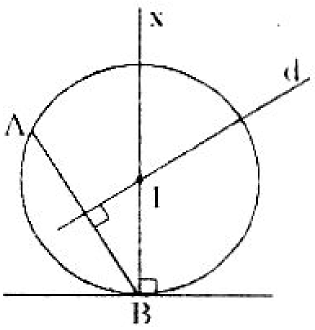
Hướng dẫn

Đáp số : $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = \frac{64}{5}.$

430 Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A(1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y + 2 = 0$ tại điểm B(–2; –1).

Hướng dẫn

Tâm I của đường tròn là giao điểm của đường trung trực d của đoạn thẳng AB với đường thẳng Bx, vuông góc với Δ tại điểm B. Tọa độ tâm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x + 3y + 11 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow I(-11; 11)$



Bán kính R = OA

Phương trình đường tròn là :

$$(x + 11)^2 + (y - 11)^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 22x - 22y - 17 = 0.$$

431 Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng

$\Delta : 2x + y - 1 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng

$d_1 : 4x + 3y - 8 = 0; \quad d_2 : 3x + 4y - 1 = 0.$

Hướng dẫn

Vì đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên tâm I của nó phải nằm trên phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1, d_2.

Các đường phân giác của các góc tạo bởi d_1, d_2 có phương trình :

$$\frac{4x + 3y - 8}{5} = \pm \frac{3x + 4y - 1}{5}$$

Tọa độ tâm I của đường tròn là nghiệm của các hệ :

$$\begin{cases} x - y - 7 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad I_1\left(\frac{8}{3}; -\frac{13}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x + y - \frac{9}{7} = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad I_2\left(-\frac{2}{7}; \frac{11}{7}\right)$$

Ta được hai đường tròn : $(C_1) : \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{3}\right)^2 = \left(\frac{31}{15}\right)^2$

$(C_2) : \left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{7}\right)^2 = \left(\frac{31}{35}\right)^2.$

432 Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng

$\Delta : 4x + 3y - 2 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng

$d_1 : x + y + 4 = 0; \quad d_2 : 7x - y + 4 = 0.$

Hướng dẫn

Đáp số : $(C_1) : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8;$

$(C_2) : (x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 18.$

433 Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A(2; 3) và tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1 : 3x - 4y + 1 = 0$; $d_2 : 4x + 3y - 7 = 0$.

Hướng dẫn

Gọi I là tâm đường tròn, ta cần có điều kiện $d(I; d_1) = d(I; d_2) = IM$

$$\Rightarrow \quad \frac{|3x - 4y + 1|}{5} = \frac{|4x - 3y + 1|}{5} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

Ta được hai hệ phương trình mà nghiệm của chúng là tọa độ tâm I mà ta tính được : $I_1(2; 8)$; $I_2\left(\frac{6}{5}; \frac{12}{5}\right)$

Và được đường tròn : $(C_1) : (x - 2)^2 + (y - 8)^2 = 25$

$$(C_2) : \left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{5}\right)^2 = 1.$$

434 Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A(1; 0) và tiếp xúc với hai đường thẳng : $d_1 : 2x + y + 2 = 0$, $d_2 : 2x + y - 18 = 0$.

Hướng dẫn

Đáp số : $(C) : \left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{22}{5}\right)^2 = 20.$

435 Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A(2; −1) và tiếp xúc với các trục Ox, Oy.

Hướng dẫn

Đáp số : $(C_1) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

$(C_2) : (x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25.$

436 Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A(4; 3), B(2; 7), C(−3; −8).

Hướng dẫn

CÁCH 1 : Gọi I(x; y) là tâm của đường tròn ta có IA = IB = IC

$$\Rightarrow \quad (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = (x - 2)^2 + (y - 7)^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = (x + 3)^2 + (y + 8)^2$$

Vậy tọa độ của I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad I(-5; 1)$

Bán kính $R = IA \Rightarrow R^2 = 85$

Phương trình đường tròn cần tìm :

$$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 85 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 10x - 2y - 59 = 0.$$

Chú ý : Cách giải này xuất phát từ việc tâm I là giao điểm của hai đường trung trực của hai đoạn thẳng AB, BC.

Ta viết được trung trực của AB là $x - 2y + 7 = 0$

trung trực của BC là $x + 3y + 2 = 0$

Tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(-5;\ 1)$

CÁCH 2 : Ta biết phương trình tổng quát của đường tròn có dạng

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Ta xác định các hệ số a, b bằng cách dựa vào giả thiết đường tròn đi qua các điểm $A(4;\ 3)$; $B(2;\ 7)$; $C(-3;\ -8)$.

- Đi qua $A(4;\ 3) \Rightarrow -8a - 6b + c + 25 = 0$

$B(2;\ 7) \Rightarrow -4a - 14b + c + 53 = 0$

$C(-3;\ -8) \Rightarrow 6a + 16b + c + 73 = 0$

Giải hệ $\begin{cases} -8a - 6b + c + 25 = 0 \\ -4a - 14b + c + 53 = 0 \\ 6a + 16b + c + 73 = 0 \end{cases}$ ta được $a = -5$; $b = 1$; $c = -59$

và được phương trình : $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 59 = 0$.

437 Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp các tam giác có đỉnh :

a) $A(0;\ 7)$; $B(2;\ 3)$; $C(-4;\ -1)$;

b) $A(1;\ -4)$; $B(3;\ -2)$; $C(-1;\ -2)$;

c) $A(-1;\ 1)$; $B(2;\ -1)$; $C(1;\ 3)$;

d) $A(2;\ 0)$; $B(0;\ 1)$; $C(-1;\ 2)$.

Hướng dẫn

Đáp số :

a) $\left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{13}{4}\right)^2 = \dfrac{325}{16}$; **b)** $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$;

c) $5x^2 + 5y^2 - 11x - 9y - 12 = 0$; **d)** $x^2 + y^2 - 7x + 11y + 10 = 0$.

438 Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có các cạnh nằm trên các đường thẳng $d_1 : 9x - 2y - 41 = 0$,

$d_2 : 7x + 4y + 7 = 0$, $d_3 : x - 3y + 1 = 0$.

Hướng dẫn

Ta có tọa độ các đỉnh $A(5;\ 2)$; $B(-1;\ 0)$; $C(3;\ -7)$.

Đáp số : $\left(x - \frac{31}{10}\right)^2 + \left(y + \frac{23}{10}\right)^2 = \frac{221}{10}$.

439 Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh nằm trên ba đường thẳng $d_1 : x - y + 2 = 0$, $d_2 : x - 5y - 2 = 0$,

$$d_3 : x + y - 8 = 0.$$

Hướng dẫn

Đáp số : $(x - 2)^2 + y^2 = 26$.

440 Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của đường thẳng

$\Delta : x - 7y + 10 = 0$ với đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

và có tâm nằm trên đường thẳng $d : 8x - 6y + 5 = 0$.

Hướng dẫn

Δ cắt (C) tại hai điểm $A(-3; 1)$; $B(4; 2)$.

Đáp số : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

441 Viết phương trình đường tròn đối xứng với đường tròn

$(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ qua đường thẳng $\Delta : x - y - 3 = 0$.

Hướng dẫn

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1.$$

442 Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 8x = 0$

Lập phương trình đường thẳng Δ' song song đường thẳng $\Delta : x - 2y = 0$ và chắn trên đường tròn một dây cung có độ dài bằng 2.

Hướng dẫn

Đường tròn có tâm $I(4; 0)$ và $R = 4$.

M là trung điểm của dây AB $\Rightarrow$ $AM = 1$; $IA = 4$

$\Rightarrow$ $IM = \sqrt{15}$

Đường thẳng $\Delta' // \Delta$ có phương trình $x - 2y + c = 0$

Khoảng cách từ tâm I đến Δ' : $d(I; \Delta') = \frac{|4 + c|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \Rightarrow \frac{|4 + c|}{\sqrt{5}}$

Theo bài ra ta phải có $\frac{|4 + c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |4 + c| = 5\sqrt{3}$

Từ đây ta có $C_1 = 5\sqrt{3} - 4$; $C_2 = -(5\sqrt{3} + 4)$

Và được hai đường thẳng Δ : $\Delta_1 :\ x - 2y + 5\sqrt{3} - 4 = 0$

$\Delta_2 :\ x - 2y - 5\sqrt{3} - 4 = 0.$

443 Cho tam giác ABC với $A(2;\ 6)$; $B(-3;\ -4)$; $C(5;\ 0)$. Viết phương trình đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC.

Hướng dẫn

Ta biết tâm đường tròn nội tiếp trong một tam giác là giao điểm của các phân giác trong của các góc và bán kính đường tròn nội tiếp là khoảng cách từ tâm đến các cạnh, do vậy bài toán viết phương trình các phân giác trong của các góc (Xem các bài 410; 411; 412).

Phương trình phân giác góc A : $x - 2 = 0$

Phương trình phân giác góc B : $x - y - 3 = 0$

Tâm I của đường tròn nội tiếp có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(2;\ 1).$$

Khoảng cách từ tâm I đến cạnh AB bằng bán kính R

Cạnh AB có phương trình $2x - y + 2 = 0$

$$d(I;\ AB) = \frac{|2.2 - 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Vậy đường tròn nội tiếp trong tam giác có tâm $I(2;\ 1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$, có phương trình :

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

444 Cho hai điểm $A(8;\ 0)$; $B(0;\ 6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ **b)** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4.$

445 Viết phương trình đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC biết ba đỉnh $A\left(\frac{1}{4};\ 0\right)$; $B(2;\ 0)$; $C(-2;\ 3)$.

Hướng dẫn

Tâm $I\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; $R = \frac{1}{2}$. Phương trình : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

446 Viết phương trình đường tròn nội tiếp trong tam giác có ba cạnh :

AB : $x - 4 = 0$, BC : $3x - 4y + 36 = 0$, CA : $4x + 3y + 23 = 0$.

Hướng dẫn

Đáp số : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

447 Cho hai điểm $A(0; -2)$, $B(4; 0)$ và đường thẳng $\Delta : x + 2y = 0$.

a) Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, B và có tâm I nằm trên đường thẳng Δ.

b) Chứng tỏ hai điểm A, B là hai điểm xuyên tâm đối.

Hướng dẫn

a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

b) Đường tròn có tâm $I(2; -1)$. Ta có $\overrightarrow{IA} = (-2; -1)$; $\overrightarrow{IB} = (2; 1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ $\Rightarrow$ I là trung điểm của AB, suy ra đpcm.

448 Tìm độ dài dây cung xác định bởi đường thẳng $\Delta : 4x + 3y - 8 = 0$ và đường tròn tâm $I(2; 1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d) : 5x - 12y + 15 = 0$.

Hướng dẫn

Đáp số : $\dfrac{8}{5}$.

449 Cho hai đường tròn : $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

$(C_2) : x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$

a) Chứng tỏ (C_1) và (C_2) cắt nhau.

b) Tìm tọa độ các giao điểm.

c) Viết phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn.

Hướng dẫn

a) (C_1) có tâm $I_1(1; 0)$ và $R_1 = 2$.

(C_2) có tâm $I_2(2; -4)$ và $R_2 = 3$.

Ta tính ra $I_1I_2 = \sqrt{17}$, suy ra $I_1I_2 < R_1 + R_2 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) cắt nhau.

b) Tọa độ các giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow A\left(\dfrac{-24 + 4\sqrt{2}}{17}; \dfrac{23 + 16\sqrt{2}}{17}\right)$; $B\left(\dfrac{-24 - 4\sqrt{2}}{17}; \dfrac{23 - 16\sqrt{2}}{17}\right)$

c) $x - 4y - 7 = 0$.

450 Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ và đường thẳng $\Delta : 4x - 3y - 15 = 0$. Xác định vị trí tương đối giữa (C) và Δ.

Hướng dẫn

(C) có tâm $I(-1; 2)$ và $R = 5$. Ta có : $d(I; \Delta) = \dfrac{|4(-1) - 3.2 - 15|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5$

Vì $d(I; \Delta) = R \Rightarrow$ (C) và Δ tiếp xúc với nhau.

451 Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(3; 2)$ trong các trường hợp sau :

a) Tiếp xúc với trục Ox. **b)** Tiếp xúc với trục Oy.

c) Tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 4x - 3y + 14 = 0$.

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ **b)** $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

c) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

452 Viết phương trình đường tròn đi qua điểm $A(1; 0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : x + 1 = 0$ tại điểm có tung độ bằng 2.

Hướng dẫn

Đáp số : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

453 Cho hai đường tròn có phương trình $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

$(C_1) : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$

a) Xác định các giao điểm A, B của hai đường tròn.

b) Viết phương trình đường tròn đi qua A, B và điểm $M(0; 1)$.

Hướng dẫn

a) $A\left(\dfrac{7 - 18\sqrt{3}}{13} ; \dfrac{-17 - 12\sqrt{3}}{13}\right) ; B\left(\dfrac{7 + 18\sqrt{3}}{13} ; \dfrac{-17 + 12\sqrt{3}}{13}\right)$

b) $16x^2 + 16y^2 - 28x + 58y - 74 = 0$.

454 Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường tròn (C) có phương trình :

$$(C) : x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$$

Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) tại điểm $A(-2; 1)$.

Hướng dẫn

Thế tọa độ của $M(-2; 1)$ vào vế trái của phương trình đường tròn, ta có

$$(-2)^2 + 1^2 - 6(-2) + 8.1 - 25 = 25 - 25 = 0$$

Vậy điểm M ∈ (C).

CÁCH 1 : Áp dụng công thức tiếp tuyến với đường tròn tại một điểm thuộc đường tròn, ta có : a = −3; b = −4; c = −25; tâm I(3; −4)

$$(-2 - 3)(x + 2) + (1 + 4)(y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -5x + 5y - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 3 = 0$$

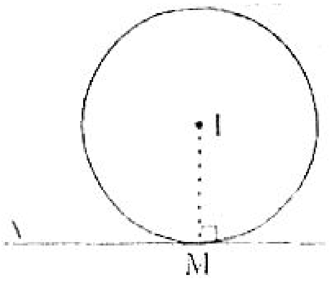
CÁCH 2 : Áp dụng tính chất tiếp tuyến tại một điểm thuộc đường tròn

Đường thẳng Δ đi qua M(−2; 1) có phương trình :

$$y - 1 = k(x + 2) \quad \Leftrightarrow \quad kx - y + 2k + 1 = 0$$

Tâm I của đường tròn có tọa độ (3; −4)

$$\vec{IM} = (-5; 5)$$



Vì $\vec{IM} \perp \Delta$ nên $k.(-5) + (-1).5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$

Từ đây, ta được phương trình tiếp tuyến Δ là : x − y + 3 = 0.

455 Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C)

$$(C) : 2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y - 2 = 0 \text{ tại điểm } M(2; 0).$$

Hướng dẫn

Dễ thấy M ∈ (C). Đáp số : 5x − y − 10 = 0.

456 Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ xuất phát từ điểm P(2; 5).

Hướng dẫn

Thế tọa độ của P vào vế trái phương trình, ta được 4 + 25 − 4 − 20 = 5 > 0

Vậy điểm P nằm ngoài đường tròn và qua P có 2 tiếp tuyến với đường tròn.

Trước hết, ta xét xem qua P có tiếp tuyến nào của đường tròn song song với trục tung Oy không

Đường thẳng qua P và song song với Oy có phương trình x − 2 = 0

Đường tròn (C) có tâm I(1; 2) và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Khoảng cách từ tâm I(1; 2) đến đường thẳng x − 2 = 0 là

$$d = |1 - 2| = 1$$

Vì $d < \sqrt{5}$ nên ta kết luận, các tiếp tuyến với đường tròn qua P không có đường nào song song với Oy.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng Δ đi qua P(2; 5)

Phương trình của Δ là $y - 5 = k(x - 2) \Leftrightarrow kx - y + 2k + 5 = 0$ (*)

Để Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) thì khoảng cách từ tâm $I(1; 2)$ đến Δ phải bằng bán kính $R = \sqrt{5}$

$$d(I; \Delta) = \frac{|k.1 - 2 - 2k + 5|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|-k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2k^2 + 3k - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = -2; k_2 = \frac{7}{2}$$

Với $k_1 = -2$. Thế vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến $d_1 : 2x + y - 9 = 0$

Với $k_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow d_2 : x - 2y + 8 = 0$

Nhận xét : Dễ thấy hai tiếp tuyến d_1 và d_2 vuông góc với nhau.

457 Viết phương trình các tiếp tuyến của các đường tròn (C) trong các trường hợp :

a) (C) : $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$, tiếp tuyến đi qua điểm $P(4; 7)$.

b) (C) có tâm là điểm (3; 2), bán kính $R = \sqrt{5}$ và tiếp tuyến đi qua điểm $Q(8; 7)$.

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** $d_1 : 2x - y - 1 = 0$ **b)** $d_1 : 2x + y = 0$

$d_2 : x - 2y + 10 = 0$ $d_2 : 2x + y - 10 = 0$

$d_1 // d_2$.

458 Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C)

(C) : $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ đi qua điểm $P(0; -1)$.

Hướng dẫn

Đáp số : $d_1 : y + 1 = 0$, $d_2 : 12x - 5y - 5 = 0$.

459 Cho đường tròn (C) có phương trình (C) : $x^2 + y^2 = 2$

a) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) tại điểm có hoành độ là 1, thuộc đường tròn.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) xuất phát từ điểm $P(4; -2)$.

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** $d_1 : x + y - 2 = 0$; $d_2 : x - y - 2 = 0$

b) $d_1 : x + y - 2 = 0$; $d_2 : x + 7y - 2 = 0$.

460 Cho đường tròn (C) có phương trình (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

a) Tìm tọa độ các giao điểm của (C) với các trục tọa độ.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm ấy.

Hướng dẫn

a) (C) đi qua gốc O và cắt Ox tại điểm thứ hai A(2; 0), cắt Oy tại điểm thứ hai B(0; 4).

b) Đáp số : Tiếp tuyến tại gốc O : $x - 2y = 0$

Tiếp tuyến tại A : $x + 2y + 2 = 0$

Tiếp tuyến tại B : $x + 2y - 8 = 0$.

461 Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C)

(C) : $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ tại các giao điểm của (C) với đường thẳng $\Delta : 3x + y - 3 = 0$.

Hướng dẫn

Đáp số : $p_1 : x - 2y + 6 = 0$

$p_2 : 2x - y - 2 = 0$

462 Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ song song với đường thẳng $\Delta : x + y - 47 = 0$.

Hướng dẫn

Đường tròn (C) có tâm I(1; -2), bán kính $R = \sqrt{8}$.

Gọi Δ' là đường thẳng song song với Δ thì phương trình Δ' là :

$$\Delta' : x + y + m = 0$$

Để Δ' tiếp xúc với (C) thì khoảng cách từ I đến Δ' phải bằng R :

$$d(I; \Delta') = \frac{|1 + (-2) + m|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{8} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|m - 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad |m - 1| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad m = 5;\ m = -3.$$

(*) Với $m = 5$ ta được tiếp tuyến $d_1 : x + y + 5 = 0$

(*) Với $m = -3$ ta được tiếp tuyến $d_2 : x + y - 3 = 0$.

463 Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ song song với đường thẳng $\Delta : 2x - y + 2 = 0$

Hướng dẫn

Đáp số : $d_1 : 2x - y + 1 + 2\sqrt{5} = 0$, $d_2 : 2x - y + 1 - 2\sqrt{5} = 0$.

464 Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ vuông góc với đường thẳng $\Delta : 12x + 5y - 50 = 0$.

Hướng dẫn

Đáp số : $d_1 : 5x - 12y + 29 = 0$, $d_2 : 5x - 12y - 49 = 0$.

465 Cho bốn điểm A(0; 2), B(4; 1), C(6; 9), D(2; 10).

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D nằm trên cùng một đường tròn.

b) Viết phương trình đường tròn qua bốn điểm A, B, C, D.

c) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn tại điểm A.

Hướng dẫn

a) Tính các tích $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$.

b) Đáp số : $x^2 + y^2 - 6x - 11y + 18 = 0$

c) Đáp số : $6x + 7y - 14 = 0$.

466 Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm M(2; 4).

a) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt đường tròn tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn có hệ số góc $k = -1$.

Hướng dẫn

a) (C) có tâm I(1; 3); M là trung điểm của AB nên IM ⊥ AB

$\overrightarrow{IM} = (1; 1)$, N(x; y) là điểm thuộc Δ thì $\overrightarrow{MN} = (x - 2; y - 4)$

$\Rightarrow \quad \Delta : 1(x - 2) + 1(y - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta : x + y - 6 = 0$

b) Đường thẳng Δ' có hệ số góc $k = -1$ có phương trình

$$y = -x + b \quad \Leftrightarrow \quad x + y - b = 0$$

Δ' tiếp xúc với (C) cho ta :

$$d(I; \Delta') = R \quad \Rightarrow \quad \frac{|1 + 3 - b|}{\sqrt{1^1 + 1^2}} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

Ta được hai tiếp tuyến : $x + y - (4 \pm 2\sqrt{2}) = 0$.

467 Cho tam giác ABC có các cạnh nằm trên ba đường thẳng

AB : $x - 2y + 5 = 0$, BC : $3x - 4y + 13 = 0$, CA : $x - y + 2 = 0$

a) Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

b) Các đường cao AD, BE, CF giao nhau tại trực tâm H. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH, CH.

Chứng minh các điểm D, E, F, I, J, K nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Hướng dẫn

a) $x^2 + y^2 - 5x - 11y + 12 = 0$

b) Chứng tỏ tọa độ các điểm D, E, F, I, J, K thỏa mãn phương trình đường tròn.

Chú thích : Đường tròn trên đây là đường tròn Euler hay đường tròn 9 điểm (đi qua 9 điểm M, N, P, D, E, F, I, J, K).

468 Cho ba điểm A(1; 2), B(9; -2), C(7; -4) và điểm D thỏa mãn hệ thức

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$$

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D nằm trên một đường tròn (C).

b) Viết phương trình đường tròn (C) và chứng minh đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng OA.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm B.

Hướng dẫn

a) Chứng minh ABCD là hình chữ nhật. **b)** (C) : $x^2 + y^2 - 10x + 5 = 0$

c) Xét tích $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} \Rightarrow OA \perp AB$ **c)** $2x - y - 21 = 0$.

469 Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

và đường thẳng $\Delta : mx - y + 7 - 4m = 0$

Biện luận theo m vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn.

Hướng dẫn

Đường tròn có tâm I(-1; 2) và bán kính $R = \sqrt{5}$

Khoảng cách từ tâm I đến Δ : $d(I; \Delta) = \dfrac{|-5m + 5|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

Từ đây ta có : $\dfrac{1}{2} < m < 2$: đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm

$m = \dfrac{1}{2}$ hoặc $m = 2$: đường thẳng tiếp xúc với đường tròn

$m < \dfrac{1}{2}$ hoặc $m > 2$: đường thẳng không cắt đường tròn.

470 Biện luận theo giá trị m, vị trí tương đối của đường thẳng $\Delta : (1 - m^2)x - 2mg + 2(1 + m^2) = 0$ với đường tròn (C) đi qua gốc tọa độ và có bán kính $R = 2$.

Hướng dẫn

Đáp số : Với mọi m đường thẳng luôn tiếp xúc với đường tròn.

471 Tìm quỹ tích trung điểm của các dây cung chắn bởi đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ trên đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ.

Hướng dẫn

Đường thẳng Δ có phương trình $\Delta : y = kx$

Tọa độ giao điểm của Δ và (C) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0 \\ y = kx \end{cases}$

Từ đây, ta được phương trình hoành độ giao điểm

$$(k^2 + 1)x - 4kx - 4 = 0 \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ Biệt thức của phương trình là $8k^2 + 4 > 0 \ \forall k \in R$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt, tức là Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB ta có :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{2k}{1 + k^2} & (1) \\ y_M = \dfrac{k^2}{1 + k^2} & (2) \end{cases}$$

Khử k giữa hai phương trình (1), (2) ta được phương trình quỹ tích trung điểm M của dây AB : $x^2 + y^2 - 2y = 0$

Quỹ tích M là đường tròn tâm $I'(0; 1)$ bán kính $R' = 1$.

472 Cho hai đường tròn : $(C) : x^2 + y^2 - x - y = 0$

$(C') : x^2 + y^2 - x + y = 0$

a) Tìm tâm và bán kính của chúng.

b) Một đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ cắt đường tròn (C) tại O và M, cắt đường tròn (C') tại O và M'. Tìm tọa độ của M, M' theo hệ số góc m của Δ.

c) Tìm quỹ tích trung điểm K của MM [illegible] i Δ quay xung quanh gốc O.

Hướng dẫn

a) Đáp số : $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$; $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $I'\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$; $R' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $M\left(\dfrac{1+m}{1+m^2}; \dfrac{m(1-m)}{1+m^2}\right)$; $M'\left(\dfrac{1-m}{1+m^2}; \dfrac{m(1-m)}{1+m^2}\right)$

c) Ta có : $K\left(\dfrac{1}{1+m^2}; \dfrac{m}{1+m^2}\right)$ hay K có tọa độ $x = \dfrac{1}{1+m^2}$; $y = \dfrac{m}{1+m^2}$

Khử m giữa x, y ta được phương trình của quỹ tích là $x^2 + y^2 - x = 0$.

473 Cho hai điểm A(0; 2); B(m; 4).

a) Tìm tọa độ trung điểm I của AB và tìm quỹ tích điểm I khi m thay đổi.

b) Viết phương trình đường tròn đi qua A, tâm I chứng minh rằng đường tròn này cắt trục Oy tại một điểm cố định thứ hai.

Hướng dẫn

a) Đáp số $I\left(\dfrac{m}{2}; 3\right)$. Quỹ tích I là đường thẳng $y - 3 = 0$.

b) $\left(x - \dfrac{m}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \dfrac{m^2+4}{4}$

Đường tròn cắt Oy tại các điểm có hoành độ x = 0, ta được

$$(y-3)^2 + \frac{m^2}{4} = \frac{m^2+4}{4} \quad \Leftrightarrow \quad (y-3)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2; y = -4$$

Vậy đường tròn cắt trục Oy tại 2 điểm A(0; 2) và A'(0; -4).

474 Cho hai điểm A(2m; 0); B(0; 1) với m là tham số.

a) Viết phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với AB.

b) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đi qua gốc O và tiếp xúc với AB tại A.

c) Tím quỹ tích tâm I khi điểm A di chuyển trên Ox.

Hướng dẫn

a) $2mx - y - 4m^2 = 0$ **b)** $I(m; 2m^2)$

c) Quỹ tích I là parabol $y = 2x^2$.

475 Cho họ đường cong có phương trình

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0 \qquad (*)$$

trong đó m là tham số.

a) Với các giá trị nào của m thì phương trình (*) là phương trình của đường tròn.

b) Tìm tập hợp tâm I của các đường tròn khi m thay đổi.

Hướng dẫn

a) Ta có : $a = m$, $b = 2(m - 2)$, $c = 6 - m$, $a^2 + b^2 - c = m^2 - 3m + 2$

Điều kiện để phương trình đã cho là phương trình của đường tròn là :

$$m^2 - 3m + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < 1 \text{ hoặc } m > 2$$

b) Tâm $I(m; 2(m - 2)) \Rightarrow I : x = m, \ y = 2(m - 2)$

Khử m giữa các biểu thức của x, y, ta được phương trình của tập hợp điểm I : $2x - y - 4 = 0$

Tập hợp điểm I là hai nửa đường thẳng thuộc đường thẳng

$\Delta : 2x - y - 4 = 0$, ứng với $x < 1$ hoặc $x > 2$.

476 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho họ đường cong có phương trình : $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx - 2(1 - m)y + 2m^2 - 2m + 3 = 0$

a) Chứng tỏ rằng với mọi m, (C_m) là các đường tròn.

b) Tìm quỹ tích tâm I của các đường tròn (C_m).

c) Cho $m = 2$ và điểm $A(0; 3)$. Viết phương trình các tiếp tuyến của (C_2) kẻ từ A.

Hướng dẫn

a) Ta có : $a^2 + b^2 - c = 4 > 0 \ \forall m \in R$ **b)** $x + y - 1 = 0$

c) $\Delta_1 : x = 0$; $\Delta_2 : 3x + 4y - 12 = 0$.

477 Cho họ đường cong có phương trình

$$(C_a) : x^2 + y^2 - 2(a + 1)x - 4(a - 1)y + 5 - a = 0$$

a) Tìm giá trị của a để họ (C_a) là đường tròn.

b) Tìm giá trị của a để họ (C_a) tiếp xúc với đường thẳng $x - y = 0$.

Hướng dẫn

a) $a < 0$ hoặc $a > 1$. **b)** $a = \dfrac{2 \pm \sqrt{85}}{9}$.

478 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét họ đường cong có phương trình : $x^2 + y^2 - 2(m + 1)x - 2(m + 2)y + 6m + 7 = 0$, m là tham số

a) Tìm quỹ tích tâm I của họ đường cong.

b) Xác định tọa độ tâm I của đường tròn thuộc họ đã cho mà tiếp xúc với trục Oy.

Hướng dẫn

a) Họ đường cong là đường tròn với $2m^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -1$ hoặc $m > 1$

Quỹ tích tâm I là hai tia thuộc đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ ứng với $x < 0; x > 2$.

b) Khoảng cách từ I đến trục Oy là : $|m + 1| = R$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 - 2 = (m + 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 2m - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \text{ (loại)} \\ m = 3 \end{array}\right.$$

Với $m = 3$ ta được đường tròn : $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$

có tâm $I(4; 5)$, bán kính $R = 4$, tiếp xúc với trục Oy.

479 Trong mặt phẳng tọa độ cho họ đường cong (C_m) có phương trình :

$$(C_m) : x^2 + y^2 + 2(m - 1)x - 2(m - 2)y + m^2 - 8m + 13 = 0$$

a) Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) là đường tròn.

Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

b) Cho $m = 4$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C_4) kẻ từ điểm $A(1; 5)$.

Hướng dẫn

a) $a^2 + b^2 - c = m^2 + 2m - 8 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < -4$ hoặc $m > 2$

Quỹ tích tâm I là đường thẳng thuộc đường thẳng $\Delta : x + y + 1 = 0$ ứng với $x < -1; x > 5$.

b) Hai tiếp tuyến : $\Delta_1 : x - 1 = 0$, $\Delta_2 : 7x + 24y - 127 = 0$.

480 Cho họ đường cong (C_m) có phương trình :

$$(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 5m^2 - 1 = 0$$

a) Chứng minh rằng họ đường cong luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

b) Tìm tất cả giá trị m để (C_m) cắt đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B và chứng minh rằng trong trường hợp này, đường thẳng AB có phương không đổi.

Hướng dẫn

a) Họ (C_m) là họ đường tròn có tâm $I(m; -2m)$ và bán kính $R = 1$.

Họ (C_m) có bán kính không đổi và tâm I chạy trên đường thẳng $\Delta : 2x + y = 0$ nên luôn tiếp xúc với hai đường thẳng song song với Δ.

b) Đường tròn (C) có hai tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng 1.

(C_m) và (C) cắt nhau với điều kiện $0 < OI < 2$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \sqrt{5m^2} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad m < \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ và } m \neq 0$$

AB là trục đẳng phương của hai đường tròn, có phương trình

$AB : 2x - 4y - 5m = 0$

AB có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; 2)$ = không đổi.

481 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, cho họ đường cong (C_m) có phương trình : $x^2 + y^2 + 2mx - 6y + 4 - m = 0$

a) Chứng minh rằng, với mọi m, (C_m) là các đường tròn và tìm quỹ tích tâm các đường tròn này.

b) Cho m = 4. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y + 10 = 0$ và cắt đường tròn (C_1) tại hai điểm A, B mà độ dài đoạn thẳng AB = 6.

Hướng dẫn

a) $a^2 + b^2 - c = m^2 + m + 5$; $\Delta_m = -19 < 0 \Rightarrow m^2 + m + 5 > 0 \ \forall m$

Tâm $I(-m; 3) \Rightarrow$ I luôn nằm trên đường thẳng $y - 3 = 0$.

b) Với m = 4 ta được $(C_1) : x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

$\Rightarrow$ Tâm $I(-4; 3)$; $R = 5$.

Gọi M là trung điểm của AB.

Vì $IM \perp AB$ mà $IA = R = 5$; $MA = \dfrac{1}{2}AB = 3 \Rightarrow IM = 4$.

Đường thẳng $\Delta' \perp \Delta$ có phương trình dạng $4x + 3y + m = 0$

Khoảng cách từ tâm I đến Δ' phải bằng 4, cho ta

$$\frac{|-16 + 9 + m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4 \Leftrightarrow |m - 7| = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 27 \\ m = -13 \end{array}\right.$$

ta được hai đường thẳng $\Delta'_1 : 4x + 3y + 27 = 0$

$\Delta'_2 : 4x + 3y - 13 = 0$.

482 Trong hệ tọa độ Oxy cho họ đường cong (C_m) :

$$(C_m) : x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0$$

a) Chứng minh rằng, với mọi giá trị của tham số m, họ đường cong (C_m) là các đường tròn.

b) Tìm quỹ tích tâm I của họ đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

c) Chứng minh rằng có hai đường tròn (C_1); (C_2) thuộc (C_m) tiếp xúc với đường tròn (C) có phương trình $(C) : x^2 + y^2 = 1$

d) Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1); (C_2).

Hướng dẫn

a) $a^2 + b^2 - c = (m + 1)^2 + 4m^2 + 5 > 0 \ \forall m$

b) Phương trình quỹ tích I : $2x + y - 2 = 0$

c) Tọa độ giao điểm giữa (C) và (C_m) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Từ đây ta có phương trình tung độ giao điểm

$$(5m^2 + 2m + 1)y^2 - 8my - m^2 - 2m + 3 = 0$$

$\Rightarrow$ Biệt thức $\quad \Delta'_m = (m + 1)^2(5m - 3)$

$$\Delta'_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1 \text{ hoặc } m = \frac{3}{5}.$$

(*) Với $m = -1$ ta được đường tròn $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$

có tâm $I_1(0; 2)$, $R_1 = 3$ tiếp xúc trong với đường tròn (C) tại điểm $A(-1; 0)$

(*) Với $m = \frac{3}{5}$ ta được đường tròn $x^2 + y^2 - \frac{16}{5} + \frac{12}{5}y - 5 = 0$

có tâm $I_2\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ và $R_2 = 3$

d) Gọi Δ là đường thẳng có phương trình $y = mx + n$ hay $mx - y - n = 0$

Để Δ tiếp xúc với (C_1) : $\dfrac{|n - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$

Δ tiếp xúc với (C_2) : $\dfrac{|8m + 5n + 6|}{5\sqrt{m^2 + 1}} = 3$

$$|n - 2| = \frac{|8m + 5n + 6|}{5}$$

Xét hai trường hợp :

(*) $n - 2 = \frac{1}{5}(8m + 5n + 6) \quad \Rightarrow \quad n = -2$

Từ $\dfrac{|n - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$ với $m = -2$ ta được $\quad n = 2 \pm 3\sqrt{5}$

và được hai tiếp tuyến chung $\quad \Delta_1 : -2x - y + 2 + 3\sqrt{5} = 0$

$\Delta_2 : -2x - y + 2 - 3\sqrt{5} = 0$

(*) $n - 2 = -\frac{1}{5}(8m + 5n + 6) \quad \Rightarrow \quad n = \dfrac{2 - 4m}{5}$

Kết hợp với $\dfrac{|n - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$ ta đi đến phương trình $4(m + 2) = 15\sqrt{m^2 + 1}$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được $209m^2 - 64m + 161 = 0$ (*)

$\Rightarrow \quad \Delta'_m = -32625 < 0 \quad \Rightarrow$ (*) vô nghiệm

Trường hợp này ta không có tiếp tuyến chung.

483 Cho họ đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y + 2m - 1 = 0$

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ đường tròn luôn đi qua hai điểm cố định.

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, họ đường tròn luôn cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

Hướng dẫn

a) Họ đường cong đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B(-1; 2)$.

b) Số giao điểm của họ đường tròn với trục tung là số nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 - 2mx - 2(m+1)y + 2m - 1 = 0 \end{cases}$$

hay số nghiệm của phương trình tung độ giao điểm

$$y^2 - 2(m+1)y + 2m - 1 = 0$$

Phương trình này có biệt thức $\Delta' = m^2 + 2 > 0$ với mọi m nên nó luôn có 2 nghiệm, tức là họ đường cong luôn cắt trục tung tại 2 điểm phân biệt.

§3. CÁC ĐƯỜNG CONIC

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Elip

Phương trình chính tắc : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \quad a > b$

- + *Trục lớn : 2a, trục nhỏ : 2b; tiêu cự : 2c với* $c^2 = a^2 - b^2$
- + *Tiêu điểm* $F_1(-c; 0); F_2(c; 0)$
- + *Tâm sai* $e = \dfrac{c}{a} < 1$
- + *Đường chuẩn :*
  - – *Ứng với tiêu điểm* F_1 : $\Delta_1 : x = -\dfrac{a}{e}$
  - – *Ứng với tiêu điểm* F_2 : $\Delta_2 : x = \dfrac{a}{e}$
- + *Bán kính qua tiêu :* $F_1M = a + ex; \qquad F_2M = a - ex.$

2. *Hypebol*

- *Phương trình chính tắc :* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

  + *Trục thực 2a; trục ảo 2b; tiêu cự 2c, với* $c^2 = a^2 + b^2$

  + *Tiêu điểm* $F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$

  + *Tâm sai* $e = \dfrac{c}{a} > 1$

  + *Đường chuẩn :* – *Ứng với tiêu điểm* F_1 : $\Delta_1 : x = -\dfrac{a}{e}$

    – *Ứng với tiêu điểm* F_2 : $\Delta_2 : x = \dfrac{a}{e}$

  + *Tiệm cận :* $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

3. *Parabol*

- *Phương trình tổng quát :* $y^2 = 2px$ $(p > 0)$, *p : tham số tiêu*

Tiêu điểm $F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$

Đường chuẩn : $\Delta : x = -\dfrac{p}{2}$

Ngoài ra còn có các dạng $y^2 = -2px$; $x^2 = 2py$; $x^2 = -2py$.

BÀI TẬP

484 Viết phương trình elip (E) trong các trường hợp :

a) Có tiêu cự bằng 8, tâm sai $e = \dfrac{1}{2}$.

b) Đi qua điểm $M(\sqrt{15}; -1)$ và có tiêu điểm $(-4; 0)$.

Hướng dẫn

a) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

b) (E) đi qua $M(\sqrt{15}; -1)$ nên $\dfrac{15}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$ (1)

Mặt khác elip có nửa tiêu cự $c = 4 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4^2$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = 16$ (2)

Từ (1) và (2) ta tính được $a^2 = 20$, $b^2 = 4$

Phương trình elip là : $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.

485 Trong mặt phẳng Oxy cho điểm P(4; 0) và đường thẳng (D) : $x - 16 = 0$

a) Chứng tỏ rằng quỹ tích những điểm M có khoảng cách MP bằng một nửa khoảng cách từ M đến (D) là một elip (E). Tìm trục lớn, trục nhỏ, tiêu cự của (E).

b) Qua tiêu điểm có hoành độ dương của (E) kẻ đường thẳng vuông góc với trục Ox, cắt (E) tại hai điểm I, J. Tính độ dài đoạn thẳng IJ.

Hướng dẫn

a) Gọi tọa độ của M là (x; y). Theo bài ra ta có :

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x - 16| \Leftrightarrow 3x^2 + 4y^2 = 192 \Leftrightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

Trục lớn : $2a = 16$, Trục nhỏ : $2b = 8\sqrt{3}$, Tiêu cự : $2c = 8$

Tiêu điểm có hoành độ dương là $F_2(4; 0)$

Đường thẳng $x = 4$ cắt (E) tại hai điểm có tung độ $y = \pm 6$ hay M(4; 6); N(4; −6)

Tính ra MN = 12.

Chú ý : Có thể thấy F_2M là bán kính qua tiêu, do vậy có thể tính như sau : $F_2M = a - \frac{c}{a}x_M$ với $a = 8$; $\frac{c}{a} = e = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow F_2M = 8 - \frac{1}{2}.4 = 6$$

$$MN = 2F_2M = 12.$$

486 Trong mặt phẳng cho elip $9x^2 + 25y^2 = 225$.

a) Viết phương trình chính tắc và xác định tiêu điểm, tâm sai của elip (E).

b) Một đường tròn (C) có tâm I(0; 1) đi qua điểm A(4; 2). Viết phương trình đường tròn (C) và chứng tỏ (C) đi qua 2 tiêu điểm của elip.

Hướng dẫn

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $F_1(-4; 0)$; $F_2(4; 0)$; $e = \frac{4}{5}$

b) (C) : $x^2 + (y-1)^2 = 17$. Tọa độ của F_1, F_2 thỏa mãn phương trình (C).

487 Trong mặt phẳng cho điểm F(1; 0) và đường thẳng D có phương trình $4x + 5 = 0$.

a) Tìm phương trình đường conic nhận F làm một tiêu điểm tương ứng với đường thẳng D làm 1 đường chuẩn và có tâm sai $e = \frac{4}{5}$.

b) Tìm độ dài trục lớn, trục nhỏ và tiêu cự của conic vừa tìm được.

Hướng dẫn

a) Gọi (x; y) là tọa độ của điểm M nằm trên conic cần tìm và H là hình chiếu của M trên (D), thì theo bài ra ta phải có :

$$MF = \frac{4}{5}MH \Rightarrow MF^2 = \frac{16}{25}MH^2 \Leftrightarrow 25[(x-1)^2 + y^2] = 16\left(x + \frac{5}{4}\right.$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 25y^2 - 90x = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 90x + 225 + 25y^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow 9(x-5)^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (*)$$

Đặt $x - 5 = X$ và $y = Y$ thì (*) có dạng $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1$

Đây là phương trình chính tắc của một elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

b) Ta có : $2a = 10$; $2b = 6$; $2c = 8$.

488 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ có hai tiêu điểm F_1 và F_2.

a) Cho điểm M(3; m) thuộc (E). Viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại M.

b) Cho A, B là hai điểm thuộc elip (E) sao cho $AF_1 + BF_2 = 8$. Hãy tính $AF_2 + BF_1$.

Hướng dẫn

a) Vì $M \in (E)$ nên $\frac{9}{25} + \frac{m^2}{16} = 1 \Rightarrow m = \frac{16}{5}$. Tọa độ của M là $m = \frac{16}{5}$.

Chú ý : Ta biết rằng phương trình của tiếp tuyến tại điểm $M(x_M, y_M)$ thuộc elip có dạng : $\frac{x_M x_M}{a^2} + \frac{y_M y_M}{b^2} = 1$

Vậy ta có thể viết ngay phương trình của tiếp tuyến của (E) tại $M\left(3; \frac{16}{5}\right)$ là :

$$\frac{3.x}{25} + \frac{\frac{16}{5}.y}{16} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 5y - 25 = 0.$$

b) Ta có $AF_1 + AF_2 = 2a = 10$ (1)

$BF_1 + BF_2 = 2a = 10$ (2)

$AF_2 + BF_2 = 8$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AF_2 + BF_1 = 12$.

489 Cho Hypebol (H) có phương trình $16x^2 - 9y^2 = 144$.

a) Viết phương trình chính tắc của (H).

b) Tìm độ dài trục thực, trục ảo, tiêu cự.

c) Tìm tọa độ tiêu điểm, tâm sai và phương trình các đường tiệm cận.

Hướng dẫn

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ **b)** $2a = 6; 2b = 8; 2c = 10.$

c) $F_1(-5; 0); F_2(5; 0); e = \frac{5}{3}; y = \pm\frac{4}{3}x$.

490 Cho điểm E(1; 0) và một điểm M trong mặt phẳng. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua trục tung.

a) Chứng minh rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{M'E} = 0$ là một hypebol (H), viết phương trình chính tắc của H.

b) Xác định độ dài trục thực, trục ảo của H, tâm sai của H.

c) Xác định tiêu điểm và phương trình các đường tiệm cận ?

Hướng dẫn

a) Nếu tọa độ của M là (x; y) thì tọa độ M' là (−x; y)

Theo bài ra, ta có : $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{M'E} = 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) + (-y)(-y) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1.$

b) Đáp số : $2a = 2; 2b = 2; e = \sqrt{2}$

b) $F_1(-\sqrt{2}; 0); F_2(\sqrt{2}; 0); y = \pm x.$

491 Cho hypebol (H) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Xác định độ dài trục thực, trục ảo, tiêu cự.

b) Xác định các đường chuẩn của hypebol.

c) Tìm một điểm M thuộc hypebol sao cho hai bán kính qua tiêu vuông góc với nhau.

d) Lập phương trình của elip (E) có các tiêu điểm là tiêu điểm của hypebol (H) và đi qua các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của (H).

Hướng dẫn

a) $2a = 8$; $2b = 6$; $2c = 10$

b) Ứng với tiêu điểm F_1 là $x + \frac{16}{5} = 0$; ứng với tiêu điểm F_2 là $x - \frac{16}{5} = 0$.

c) M là giao điểm của (H) và đường tròn đường kính là đoạn thẳng F_1F_2.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ : $\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

Giải hệ này ta được bốn điểm :

$$\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}\right); \left(\frac{-4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}\right); \left(\frac{4\sqrt{34}}{5}; -\frac{9}{5}\right); \left(\frac{-4\sqrt{34}}{5}; -\frac{9}{5}\right)$$

d) Hình chữ nhật cơ sở MNPQ có một đỉnh, M chẳng hạn có tọa dộ (4; 3). Ta viết phương trình của elip có các tiêu điểm $F_1(-5; 0)$; $F_2(5; 0)$ và đi qua M(4; 3).

Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ta có :

Elip đi qua điểm M(4; 3) : $\frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$ (1)

Mặt khác $a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 25$ (2)

Từ (1) và (2) ta được : $a^2 = 40$; $b^2 = 15$

Phương trình elip (E) là : $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1$.

492 Viết phương trình của hypebol (H) biết nó có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của elip (E) : $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1$ và đi qua điểm $M(4\sqrt{2}; 3)$.

Hướng dẫn

$$(H) : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

493 Trong mặt phẳng cho điểm F(4; 0) và đường thẳng D có phương trình $4x - 9 = 0$. Tìm quỹ tích các điểm M trong mặt phẳng có tỉ số khoảng cách đến điểm F và đến đường thẳng D bằng $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn

Quỹ tích M là một hypebol (H) có phương trình : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

494 Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Viết phương trình của elip (E) đi qua điểm A(4; 6) và có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của (H).

Hướng dẫn

Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Hypebol có $c^2 = 8 + 8 = 16$

Từ đây ta có hệ $\begin{cases} a^2 - 16 = b^2 \\ \frac{16}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 1 \end{cases}$.

Giải hệ này, ta có $b^2 = 48;\ a^2 = 64$

và được elip : (E) : $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$.

495 Lập phương trình chính tắc của Hypebol biết a + b = 7 hai tiệm cận là $3x \pm 4y = 0$

a) Tính độ dài các trục.

b) Lập phương trình tiếp tuyến với hypebol song song với đường thẳng $\Delta : 5x - 4y + 10 = 0$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\begin{cases} a + b = 7 \\ \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad a = 4, \quad b = 3$

Phương trình chính tắc của hypebol là : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Tiếp tuyến cần tìm có phương trình dạng (d) : $5x - 4y + 4m = 0$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{5}{4}x + m$$

Hoành độ giao điểm của (d) và hypebol là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = \dfrac{5}{4}x + m \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 5mx + 2m^2 + 18 = 0 \qquad (*)$$

Để (d) tiếp xúc với hypebol thì phương trình bậc hai (*) phải có nghiệm kép và điều này tương đương với biệt thức $\Delta = 0$

$$\Delta = 25m^2 - 2(2m^2 + 18) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9m^2 - 144 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \pm 4.$$

Ta được hai tiếp tuyến thỏa mãn đầu bài : $(d_1) : 5x - 4y + 16 = 0$

$(d_2) : 5x - 4y - 16 = 0.$

496 Trong mặt phẳng tọa độ, cho parabol (P) : $y^2 = 8x$

a) Xác định tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của (P).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của parabol tại điểm M thuộc parabol và có tung độ bằng 4.

c) Giả sử đường thẳng (d) đi qua tiêu điểm của parabol và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ tương ứng là x_1, x_2.

Chứng minh $AB = x_1 + x_2 + 4$.

Hướng dẫn

a) Do $2p = 8 \Rightarrow p = 4$ suy ra $F(2; 0)$

Đường chuẩn $\Delta : x + 2 = 0$

b) Ta biết phương trình tiếp tuyến với parabol tại điểm M thuộc parabol có dạng $y_M.y = p(x + x_M)$

Vì $y_M = 4 \Rightarrow x_M = 2$

Phương trình tiếp tuyến với parabol tại M(2; 4) là :

$$4y = 3(x + 2) \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2 = 0$$

c) Ta có : $AB = FA + FB = \dfrac{p}{2} + x_1 + \dfrac{p}{2} + x_2 \quad \Rightarrow \quad AB = 4 + x_1 + x_2.$

497 Trong mặt phẳng Oxy cho điểm F(3; 0) và đường thẳng (D) : $3x - 4y + 16 = 0$.

a) Tính khoảng cách d(F; D) suy ra phương trình đường tròn tâm F, tiếp xúc với đường thẳng (D).

b) Viết phương trình parabol (P) có tiêu điểm F và đỉnh là gốc tọa độ O. Chứng tỏ rằng parabol (P) tiếp xúc với đường thẳng (D). Tìm tọa độ tiếp điểm.

Hướng dẫn

a) $d(F; \Delta) = 5$

(C) : $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$

$y^2 = 12x$.

Tọa độ giao điểm (P) và (D) là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - 4y + 16 = 0 \\ y^2 - 12x = 0 \end{cases}$

Hệ này có nghiệm kép $x = \frac{16}{3}$; $y = 8$ duy nhất

Tọa độ tiếp điểm $M\left(\frac{16}{3}; 8\right)$.

498 Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với A(1; 0), B(5; 4) và C(2; –2).

a) Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC và tính độ dài đường cao AH.

b) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Viết phương trình parabol có tiêu điểm F(2; 0) và đường chuẩn là trục Oy. Chứng tỏ rằng ba điểm A, B, C thuộc parabol.

Hướng dẫn

a) BC : $2x - y - 6 = 0$; $AH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ **b)** (C) : $x^2 + y^2 - 9x - y + 8 = 0$

c) (P) : $y^2 = 4x - 4$. Tọa độ các điểm A, B, C thỏa mãn phương trình parabol.

499 Lập phương trình chính tắc của parabol trong các trường hợp :

a) Đi qua điểm M(1; –4) và có trục đối xứng là trục Ox.

b) Có tiêu điểm là điểm F(–3; 0).

Hướng dẫn

a) (P) : $y^2 = 16x$ **b)** (P) : $y^2 = -12x$.

500 Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Tìm tâm sai và viết phương trình tiếp tuyến của elip tại điểm M thuộc elip (E) có hoành độ x = 4.

b) Viết phương trình của parabol (P) có đỉnh trùng với gốc tọa độ và có tiêu điểm trùng với tiêu điểm bên trái của elip (E)

Hướng dẫn

a) $e = \frac{4}{5}$; $M\left(4; \pm\frac{9}{5}\right)$ ⇒ có 2 tiếp tuyến : $4x + 5y - 25 = 0$

$4x - 5y - 25 = 0$

b) $y^2 = -16x$.

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương 1 : MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP 3

Chương 2 : HÀM SỐ BẬC NHẤT – HÀM SỐ BẬC HAI 17

Chương 3 : PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH 33

Chương 4 : BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. Bất đẳng thức 58

§2. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn, hai ẩn 75

§3. Dấu của tam thức bậc hai. Bất phương trình bậc hai 83

Chương 5 : THỐNG KÊ 93

Chương 6 : GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC 101

PHẦN HÌNH HỌC

Chương 1 : VECTƠ 136

Chương 2 : HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN

§1. Giá trị lượng giác của góc bất kì (từ 0° đến 180°) 175

§2. Tích vô hướng của hai vectơ 178

§3. Hệ thức lượng trong tam giác 195

Chương 3 : PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. Đường thẳng 202

§2. Đường tròn 231

§3. Các đường côníc 253

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@ vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: NGỌC QUYÊN - MINH THẢO
Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

---

500 BÀI TOÁN CƠ BẢN VÀ MỞ RỘNG 10

Mã số: 1L-49 ĐH2006
In 2000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Xí nghiệp in Tuần báo Văn nghệ TP. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 354 - 2006/CXB/1 - 56/ĐHQGHN, ngày 8/05/2006.
Quyết định xuất bản số: 139 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006.